MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
Avd. Matematik	den 10 januari 2022
Examinator: Håkan Granath	

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Mängderna X och Y uppfyller $|X \cup Y| = 21$, $|Y| = 16$, $|X \cap Y| = 7$. Bestäm $|X|$ och $|X \setminus Y|$. (2p)

   (b) Hur många olika ”ord” kan bildas med hjälp av 2 stycken A, 3 st. B och 4 st. C om orden inte får innehålla bokstavskombinationen ABBA. (T ex ABBCCCACB är godkänt.) Svaret skall anges uträknat. (3p)

2. (a) Visa att 7 är det minsta primtal som delar $2^{50} + 3$. (3p)

   (b) Bestäm asymptoterna till hyperbeln $x^2 + 2x - 9y^2 + 18y + 1 = 0$, samt skissa grafen. (2p)

3. Låt $p(z) = z^5 + 2z^4 + 4z^3 - 8z^2 - 16z - 32$.

   (a) Bestäm resten när $p(z)$ delas med $z + i$. (1p)

   (b) Man vet att $p(-1 + \sqrt{3}\, i) = 0$. Bestäm alla nollställen $z \in \mathbb{C}$ till $p(z)$, och faktorisera $p(z)$ så långt som möjligt i reella faktorer. (4p)

4. Betrakta de 4 punkterna

   $$A = (1, 3, 2), \qquad B = (2, 2, 1), \qquad C = (2, 5, 2), \qquad D = (1, 6, 3).$$

   (a) Visa att fyrhörningen $ABCD$ är en parallellogram, och beräkna dess area. Bestäm ekvationen (på normalform) för planet den ligger i. (4p)

   (b) Avgör om linjen $(x, y, z) = (3, 4, 5) + t(1, -1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$, passerar genom fyrhörningen eller går på utsidan av den. (1p)

Var god vänd!

5. Betrakta en given godtycklig triangel $\triangle ABC$. Låt D vara mittpunkt på sidan AB, och låt E vara punkten på sträckan DC uppfyller $2|\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{EC}|$. Betrakta baserna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ och $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$.

   (a) Uttryck vektorerna $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Om $\vec{v}$ är vektorn med koordinaterna $(2, 1)$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, bestäm koordinaterna för $\vec{v}$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. (4p)

   (b) Betrakta koordinatsystemet med origo i punkten E och basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Bestäm koordinaterna för punkterna A, B och C i detta koordinatsystem. (1p)

6. (a) Bestäm matrisen för linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av spegling i linjen (3p)

$$(x, y, z) = t(1, -2, 2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Låt S vara spegling i xz-planet. Bestäm matrisen för den linjära avbildningen $S \circ T^{-1}$. (2p)