STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter LeFanu Lumsdaine

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2021
Fredag, 2021-05-28

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 4 problems (8–11), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points. The questions are provided both in English (pp. 2–3) and Swedish (pp. 4–5).

You may submit your answers in either English or Swedish. Submissions should be uploaded as pdf assignments on the course website, either scanned or using LaTeX or similar. Further technical instructions can be found there.

The exam is open book: you can refer to the textbook, your own notes, and other reference resources. But you must not collaborate, discuss, or seek or receive assistance during the exam, either from each other within the course or from anyone else.

Write clearly and motivate your answers carefully. All answers should be fully justified (unless stated otherwise). You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Written Exam (English)

Basic part

1 Consider the following formulas:

$$\varphi \coloneqq (P_1 \vee P_2) \leftrightarrow P_3 \qquad\qquad \psi \coloneqq P_3 \to P_1$$

Give two interpretations $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, such that φ holds in $\mathcal{V}_1$ and not $\mathcal{V}_2$, and ψ holds in $\mathcal{V}_2$ but not $\mathcal{V}_1$.

2 Derive, or give a countermodel to, each of the following:

(a) $P_1 \wedge P_2,\ P_1 \to P_3,\ P_2 \to P_4 \vdash P_3 \wedge P_4$

(b) $P_1 \leftrightarrow P_2,\ P_1 \to P_3,\ P_2 \to P_4 \vdash P_3 \leftrightarrow P_4$

3 (a) Show that if φ, ψ are tautologies, then $\varphi \approx \psi$.

(b) Give two distinct propositional formulas φ, ψ that are logically equivalent, but are not tautologies.

4 Give the free variables of the following formulas.

(a) $\neg(P_1(x_1) \vee \neg P_1(x_2))$

(b) $(\exists x_2,\ x_3 P_2(x_1, x_2, x_3)) \to (\exists x_2,\ P_1(x_1, x_2, x_2))$

5 (a) Find the error in the following derivation of $(\exists x_1\ P_1(x_1)) \to (\forall x_1\ P_1(x_1))$:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x_1\ P_1(x_1) \qquad \dfrac{[P_1(x_1)]}{\forall x_1\ P_1(x_1)}\,\forall I}{\forall x_1\ P_1(x_1)}\,\exists E}{(\exists x_1\ P_1(x_1)) \to (\forall x_1\ P_1(x_1))}\,\to I$$

(b) Show that the formula $(\exists x_1\ P_1(x_1)) \to (\forall x_1\ P_1(x_1))$ cannot be derived without undischarged assumptions.

6 Which of the following hold? For each, give a derivation or a countermodel.

(a) $P_1(s) \leftrightarrow P_1(t)\ \vdash\ s \doteq t$

(b) $s \doteq t\ \vdash\ P_1(s) \leftrightarrow P_1(t)$

7 Let $\mathcal{N}$ be the structure $\langle\, \mathbb{N}\,;\ ;\, 0, S, +, \times\,\rangle$. Give a formula δ with free variables x_1, x_2 that represents the predicate "x_1 is divisible by x_2" in $\mathbb{N}$.

(You do not need to justify that your formula represents this predicate.)

Problem part

8 Here is an alternative equality rule, which could be given instead of the replacement rule:

$$\frac{s \doteq t \qquad \varphi[x_k/x_i][x_k/x_j]}{\varphi[s/x_i][t/x_j]} \; =\text{-ELIM}$$

in which s, t may be any terms and φ any formula such that t and x_k are free for x_j in φ, s and x_k are free for x_i in φ, and x_k does not occur free in φ or any undischarged assumptions of the derivation of the premise $\varphi[x_k/x_i][x_k/x_j]$.

Intuitively, the rule says: if φ is some statement about x_i and x_j, and we can prove it when x_i and x_j are both the same object x_k (for an arbitrary new x_k), then it holds for any two equal objects.

(a) Show that any instance of the usual replacement rule can be derived using this rule. That is, for all suitable s, t, φ, x_i, there is a derivation using this rule and possibly the other usual rules, but without the replacement rule, showing $s \doteq t,\ \varphi[s/x_i] \vdash \varphi[t/x_i]$.

(b) If we had included this rule in the rules of natural deduction, we would require an extra case for it in the inductive proof of the soundness theorem. Give that case.

You may use, if necessary, the following substitution lemma: for any formula φ and term t, with t free for x_i in φ, and for any structure $\mathcal{A}$ and valuation v for $\mathcal{A}$,

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v\left[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}\right]}.$$

9 Give a derivation showing that

$$\neg(\forall x_1\ (\varphi \wedge \psi)) \vdash \exists x_1\ (\neg\varphi \vee \neg\psi).$$

10 Consider the structure $\langle\, \mathbb{N}\,;\, \leq\,;\ \rangle$ and $\langle\, \mathbb{R}\,;\, \leq\,;\ \rangle$, over the arity type $\langle\, 2\,;\ \rangle$.

(a) Give some closed formula φ such that $\langle\, \mathbb{N}\,;\, \leq\,;\ \rangle \vDash \varphi$ but $\langle\, \mathbb{R}\,;\, \leq\,;\ \rangle \nvDash \varphi$.

(b) Let φ_{pre} be the formula

$$(\forall x_1\ P_1(x_1, x_1)) \wedge (\forall x_1, x_2, x_3\ ((P_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2, x_3)) \rightarrow P_1(x_1, x_3)))\,.$$

Give some closed formula ψ such that $\langle\, \mathbb{N}\,;\, \leq\,;\ \rangle \vDash \psi$ and $\langle\, \mathbb{R}\,;\, \leq\,;\ \rangle \vDash \psi$, but $\varphi_{pre} \nvdash \psi$. (Justify your answer for why $\varphi_{pre} \nvdash \psi$.)

(You do not need to justify your computations of the interpretations of formulas in specific structures.)

11 Recall that a theory Γ is called *complete* just if for every formula φ, either $\Gamma \vdash \varphi$ or $\Gamma \vdash \neg\varphi$, and *deductively closed* if for all φ, if $\Gamma \vdash \varphi$ then $\varphi \in \Gamma$.

(a) Show that if Γ, Δ are deductively closed theories, then their intersection $\Gamma \cap \Delta$ is deductively closed.

(b) Show that there are complete theories Γ, Δ such that $\Gamma \cap \Delta$ is not complete.

(c) Give a complete and deductively closed theory that is not maximally consistent.

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 Betrakta följande formler:

$$\varphi \coloneqq (P_1 \vee P_2) \leftrightarrow P_3 \qquad\qquad \psi \coloneqq P_3 \to P_1$$

Ange två tolkningar $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, så att φ gäller i $\mathcal{V}_1$ men inte i $\mathcal{V}_2$, och ψ gäller i $\mathcal{V}_2$ men inte i $\mathcal{V}_1$.

2 Härleda, eller ge en motmodell till vardera av följande:

(a) $P_1 \wedge P_2,\ P_1 \to P_3,\ P_2 \to P_4 \vdash P_3 \wedge P_4$

(b) $P_1 \leftrightarrow P_2,\ P_1 \to P_3,\ P_2 \to P_4 \vdash P_3 \leftrightarrow P_4$

3 (a) Visa att om φ, ψ är tautologier, så $\varphi \approx \psi$.

(b) Ge två olika satslogiska formler, φ och ψ som är logiskt ekvivalenta, men inte är tautologier.

4 Give the free variables of the following formulas.

(a) $\neg(P_1(x_1) \vee \neg P_1(x_2))$

(b) $(\exists x_2,\ x_3 P_2(x_1, x_2, x_3)) \to (\exists x_2,\ P_1(x_1, x_2, x_2))$

5 (a) Hitta felet i följande härledning av $(\exists x_1\ P_1(x_1)) \to (\forall x_1\ P_1(x_1))$:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x_1\ P_1(x_1) \qquad \dfrac{[P_1(x_1)]}{\forall x_1\ P_1(x_1)}\ \forall I}{\forall x_1\ P_1(x_1)}\ \exists E}{(\exists x_1\ P_1(x_1)) \to (\forall x_1\ P_1(x_1))}\ \to I$$

(b) Visa att formeln $(\exists x_1\ P_1(x_1)) \to (\forall x_1\ P_1(x_1))$ inte kan härledas utan oavslutade antagenden.

6 Vilka av följande gäller? För var och en, ange en härledning eller en motmodell.

(a) $P_1(s) \leftrightarrow P_1(t)\ \vdash\ s \doteq t$

(b) $s \doteq t\ \vdash\ P_1(s) \leftrightarrow P_1(t)$

7 Låt $\mathcal{N}$ vara strukturen $\langle\, \mathbb{N}\,;\ ;\, 0, S, +, \times\,\rangle$. Ge en formel δ med fria variabler x_1, x_2 som representerar predikatet "x_1 är delbart med x_2" i $\mathbb{N}$.

(Ni behöver inte motivera att formeln representerar detta predikat.)

Problemdel

8 Här är en alternativ regel som skulle kunna ges i stället för ersättningsregeln:

$$\frac{s \doteq t \qquad \varphi[x_k/x_i][x_k/x_j]}{\varphi[s/x_i][t/x_j]} = \text{-ELIM}$$

i vilken s, t är termer, och φ en formel så att t och x_k är fria för x_j i φ, s och x_k är fria för x_i i φ, och x_k förekommer inte fri i φ eller något oavslutat antagende av härledningen av premissen $\varphi[x_k/x_i][x_k/x_j]$.

Intuitivt, regeln säger: om φ är något påstående om x_i och x_j, och vi kan bevisa det när x_i och x_j är både samma objektet x_k (för en godtyckliga ny x_k), så gäller det för alla två lika objekt.

(a) Visa att varje fall av den vanliga ersättningsregeln kan härledas med denna regel i stället. D.v.s., för alla passande s, t, φ, x_i, det finns en härledning som använder denna regel och eventuellt dem andra vanliga regler, men utan ersättningsregeln, som visar att $s \doteq t,\ \varphi[s/x_i] \vdash \varphi[t/x_i]$.

(b) Om den här regeln hade inkluderats i reglerna för naturlig deduktion, så skulle vi behöva ett till fall i det induktiva beviset av sundhetssatsen. Ange det fallet. *Du får använda, om nödvändigt, följande substitutionslemma: För varje formel φ och term t, så att t är fri för x_i i φ, och för varje tolkning $\mathcal{A}$, v,*

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v\left[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}\right]}.$$

9 Ge en härledning som visar att

$$\neg(\forall x_1\ (\varphi \land \psi)) \vdash \exists x_1\ (\neg\varphi \lor \neg\psi).$$

10 Betrakta strukturerna $\langle\, \mathbb{N}\,;\, \leq\,;\ \ \rangle$ och $\langle\, \mathbb{R}\,;\, \leq\,;\ \ \rangle$, över ställighetstypen $\langle\, 2\,;\ \ \rangle$

(a) Ange en sluten formel φ så att $\langle\, \mathbb{N}\,;\, \leq\,;\ \ \rangle \vDash \varphi$ men $\langle\, \mathbb{R}\,;\, \leq\,;\ \ \rangle \nvDash \varphi$

(b) Låt φ_{pre} vara formeln

$$(\forall x_1\ P_1(x_1, x_1)) \land (\forall x_1, x_2, x_3\ ((P_1(x_1, x_2) \land P_1(x_2, x_3)) \to P_1(x_1, x_3)))\,.$$

Ange en sluten formel ψ så att $\langle\, \mathbb{N}\,;\, \leq\,;\ \ \rangle \vDash \psi$ och $\langle\, \mathbb{R}\,;\, \leq\,;\ \ \rangle \vDash \psi$, men $\varphi_{pre} \nvDash \psi$. (Motivera svaret om varför $\varphi_{pre} \nvDash \psi$.)

(Ni behöver inte motivera beräkningarna av tolkningarna av formler i specifika strukturer.)

11 Påminn att en teori Γ kallas *fullständig* om för varje formel φ, antingen $\Gamma \vdash \varphi$ eller $\Gamma \vdash \neg\varphi$; och *sluten under härledning* om för alla φ, om $\Gamma \vdash \varphi$, så $\varphi \in \Gamma$.

(a) Visa att om Γ, Δ är slutna under härledning, så är snittteorin $\Gamma \cap \Delta$ sluten under härledning.

(b) Visa att det finns fullständiga teorier Γ, Δ så att $\Gamma \cap \Delta$ inte är fullständig.

(c) Ange en fullständig teori som är sluten under härledning men som inte är maximalt konsistent.

——— Slut på provet ———