Lösningar till tentamen

Matematisk Analys, problemlösning 211217.

1.a) Vi använder MacLaurin-utveckling:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5),$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5),$$

vilket ger $\arctan 2x - \sin 2x =$

$$(2x - \frac{8}{3}x^3 + O(x^5)) - (2x - \frac{8}{6}x^3 + O(x^5)) =$$

$$-\frac{8}{6}x^3 + O(x^5)$$

och $\arctan 3x - \sin 3x =$

$$(3x - \frac{27}{3}x^3 + O(x^5)) - (3x - \frac{27}{6}x^3 + O(x^5)) =$$

$$-\frac{27}{6}x^3 + O(x^5).$$

Insättning i gränsvärdet ger nu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x - \sin 2x}{\arctan 3x - \sin 3x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8}{6}x^3 + O(x^5)}{-\frac{27}{6}x^3 + O(x^5)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8}{6} + O(x^2)}{-\frac{27}{6} + O(x^2)} = \frac{\frac{8}{6}}{\frac{27}{6}} = \frac{8}{27}.$$

b) Eftersom $n^2 + n \geq n^2 - n$ så följer det att

$$1 \leq \frac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2-n)}.$$

Å andra sidan är $2n^2 \geq n^2+n$ och $n^2-n \geq \frac{1}{2}n^2$ för $n \geq 2$, vilket betyder att

$$\frac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2-n)} \leq \frac{\ln(2n^2)}{\ln(\frac{1}{2}n^2)} = \frac{\ln(n^2) + \ln 2}{\ln(n^2) - \ln 2}$$

$$= \frac{1 + \frac{\ln 2}{\ln(n^2)}}{1 - \frac{\ln 2}{\ln(n^2)}} \to \frac{1+0}{1-0} = 1,$$

eftersom $\frac{\ln 2}{\ln(n^2)} \to 0$ då $n \to \infty$. Enligt instängningslagen följer nu att det givna gränsvärdet är 1.

2. Funktionen är definierad, kontinuerlig och dessutom godtyckligt många gånger deriverbar på $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vi observerar först att funktionen är udda, och sedan att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi \text{ och } \lim_{x\to 0\pm} f(x) = \pm\infty,$$

vilket speciellt ger de tre asymptoterna $y = \pi$, $y = -\pi$ och $x = 0$ (tvåsidig). För derivatan får vi

$$f'(x) = D\left(\frac{1}{x} + 2\arctan x\right) =$$

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)x^2},$$

med de uppenbara nollställena $x = \pm 1$.

Vi får nu följande tabell:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$+$	0	$-$	$\wr$	$-$		$+$	
f	$-\pi$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	$1+\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π

Vi noterar att -1 är en lokal maxpunkt med maxvärde $-\frac{\pi}{2} - 1$, och att 1 är en lokal minpunkt med minvärde $1 + \frac{\pi}{2}$. Det följer också att

$$V_f =]-\infty, -\frac{\pi}{2} - 1] \cup [\frac{\pi}{2} + 1, \infty[.$$

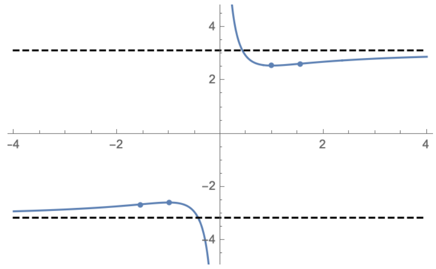
För andraderivatan får vi $f''(x) =$

$$D\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)x^2}\right) = -\frac{2\left(x^4 - 2x^2 - 1\right)}{x^3\left(x^2+1\right)^2}.$$

För att hitta nollställena sätter vi $w = x^2$ och får ekvationen $w^2 - 2w - 1 = 0$, med rötterna $w = 1 \pm \sqrt{2}$. Eftersom $w = x^2 \geq 0$ förkastas den negativa roten och vi får kvar $w = 1+\sqrt{2}$, vilket ger de två rötterna $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ och följande tabell:

x		$-\sqrt{1+\sqrt{2}}$		0		$\sqrt{1+\sqrt{2}}$	
f''	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$	0	$-$
f	$\smile$		$\frown$	$\wr$	$\smile$		$\frown$

$f(x)$ är konvex på $]-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}]$ och på $]0, \sqrt{1+\sqrt{2}}]$, konkav på $[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, 0[$ och på $[\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty[$. $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ger inflexionspunkter.



3. Kurvorna skär i $(0,0)$ och $(1,1)$. Rotationsvolymen då området roterar runt

x-axeln fås genom att först beräkna volymen som uppstår då kurvan $y = x^{1/3}$, $0 \le x \le 1$, roterar och sedan subtraherar volymen som uppstår då $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, roterar:

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(x^{1/3}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx =$$

$$\pi \left[\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \pi\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}.$$

Rotationsvolymen runt y-axeln kan beräknas på samma sätt om vi i stället löser ut x som funktion av y, alltså $x = y^{1/2}$, $0 \le y \le 1$ och $x = y^3$, $0 \le y \le 1$:

$$V_y = \pi \int_0^1 \left(y^{1/2}\right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(y^3\right)^2 dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{7}y^7\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \frac{5\pi}{14}.$$

4. Funktionen är partiellt deriverbar i hela området. Vi beräknar först de partiella derivatorna:

$$\begin{cases} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-4x}{(x^2+y^2)^2} + y, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y}{(x^2+y^2)^2} + x. \end{cases}$$

$yf'_x - xf'_y = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0$ dvs $x = \pm y$. Insättning av $x = y$ i $f'_x = 0$ ger ekvationen $0 = -x^{-3} + x$ med rötterna $x = \pm 1$ och därefter de kritiska punkterna $(1, 1)$ och $(-1. -1)$ med det gemensamma funktionsvärdet 2. Insättning av $x = -y$ ger $0 = -x^{-3} - x$ som inte ger någon lösning i området.

På den inre randen antar f samma värden som $h_1(t) = f(\cos t, \sin t) = 2 + \cos t \sin t = 2 + \frac{1}{2}\sin 2t$ som uppenbarligen varierar mellan $\frac{3}{2}$ och $\frac{5}{2}$ eftersom $-1 \le \sin 2t \le 1$. På samma sätt antar f på den yttre randen samma värden som $h_2(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = \frac{1}{2} + (2\cos t)(2\sin t) = \frac{1}{2} + 2\sin 2t$ som varierar mellan $-\frac{3}{2}$ och $\frac{5}{2}$.

Jämförelse av talen $2, 2 \pm \frac{1}{2}$ och $\frac{1}{2} \pm 2$ ger Max$=\frac{5}{2}$ och Min$=-\frac{3}{2}$.

5. Integralen beräknas som en itererad enkelintegral:

$$\iint_D x^2y^2\,dxdy = \int_0^1 \left(x^2 \int_x^{2x} y^2\,dy\right) dx =$$

$$\int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_x^{2x} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left(8x^3 - x^3\right) dx =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 7x^5\,dx = \frac{7}{3}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{7}{18}.$$

6.a) Ekvationen är separabel:

$$y' + y^2 = xy^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = (x-1)dx,$$

vilket ger

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (x-1)dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger nu att

$$-\frac{1}{1} = \frac{1}{2}0^2 + 0 + C,$$

dvs $C = -1$, vilket insatt i lösningen ger

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 - x - 1.$$

Om vi löser ut y får vi

$$y = \frac{1}{1 + x - \frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{2 + 2x - x^2}.$$

b) Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 4 + 4 = 0$$

med dubbelroten $r = 2$. Den homogena ekvationen har därför lösningen

$$y_h = (Cx + D)e^{2x}.$$

Högerledet är e^{2x} och vi noterar att detta är ett (dubbelt) resonansfall. En partikulärlösning kan sökas antingen direkt med ansatsen $y_p = Ax^2e^{2x}$ eller via variabelbytet $y = ze^{2x}$, vilket ger $y' = (z' + 2z)e^{2x}$ och $y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$. Insatt i ekvationen får vi

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \Leftrightarrow z'' = 1,$$

vilket ger $z = \frac{1}{2}x^2(+Cxe^{2x} + De^{2x})$.

Vi får alltså sammantaget den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = (Cx + D)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

Vi kan notera att man med variabelsubstitutionsmetoden faktiskt kan få fram hela lösningen, inklusive den homogena delen, utan något extra arbete.

/Martin Tamm/211217