MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Matematisk Analys,
problemlösning 7,5 hp,
220118

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. 15 poäng (inklusive bonus) ger säkert godkänt.

1. Beräkna följande gränsvärden:

   a)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\arctan x)^2}-\frac{1}{x^2}\right).$$
2 p

   b)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\sin n}{\ln n^2+\sin n^2}.$$
2 p

2. Betrakta funktionen $f(x) = x + 2\arctan\frac{1}{x}$. Undersök definitions- och värdemängd, extrempunkter, konvexitetsegenskaper och asymptoter, samt skissera grafen. 5 p

3. För vilka värden på det reella talet a har ekvationen
$$x + 2\sin x = a$$
precis två reella lösningar? 5 p

4. Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion med kontinuerliga partiella derivator i hela $\mathbb{R}^2$. Antag vidare att $f(t, 2t) = 3\sin t$ och $f(2s, s) = 2s$ för alla $s, t \in \mathbb{R}$. Bestäm f:s tangentplan i origo. 5 p

5. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D x^2y^2\,dxdy,$$
där D är området $D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x + y \ge 0\}$. 5 p

6. a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet
$$y' + 2xy = e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1.$$
3 p

   b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + x - 1.$$
3 p

Information om skrivningsåterlämning ges av studentexpeditionen.

Lösningar till tentamen

Matematisk Analys, problemlösning 220118.

1.a) Vi använder MacLaurin-utveckling:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5) \; (= x + O(x^3)),$$

vilket ger

$$\frac{1}{(\arctan x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (\arctan x)^2}{x^2(\arctan x)^2} =$$

$$\frac{x^2 - (x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5))^2}{x^2(x + O(x^3))^2} =$$

$$\frac{\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \frac{\frac{2}{3} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to \frac{2}{3}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \sin n}{\ln n^2 + \sin n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \sin n}{2\ln n + \sin n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\sin n}{\ln n}}{2 + \frac{\sin n^2}{\ln n}} = \frac{1}{2},$$

eftersom både $\frac{\sin n}{\ln n}$ och $\frac{\sin n^2}{\ln n}$ går mot noll då $n \to \infty$.

2. Funktionen är definierad, kontinuerlig och dessutom godtyckligt många gånger deriverbar på $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vi observerar först att funktionen är udda, och sedan att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ och } \lim_{x\to 0\pm} f(x) = \pm\pi.$$

Det finns inga lodräta asymptoter, men

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ och } \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0,$$

vilket visar att linjen $y = x$ är en tvåsidig asymptot. För derivatan får vi

$$f'(x) = D\left(x + 2\arctan\frac{1}{x}\right) =$$

$$1 + \frac{2}{1 + (1/x)^2} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

med de uppenbara nollställena $x = \pm 1$.

Vi får nu följande tabell:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$+$	0	$-$	$\wr$	$-$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	$1+\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	∞

Vi noterar att -1 är en lokal maxpunkt med maxvärde $-\frac{\pi}{2} - 1$, och att 1 är en lokal minpunkt med minvärde $1 + \frac{\pi}{2}$, men att globala extrempunkter saknas. Det följer också att

$$V_f =]-\infty, -\frac{\pi}{2} - 1] \cup [\frac{\pi}{2} + 1, \infty[.$$

För andraderivatan får vi

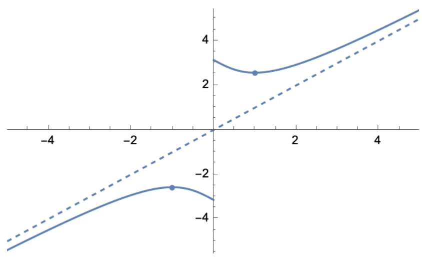
$$f''(x) = D\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) =$$

$$\frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

som saknar nollställen i definitionsmängden. Vi får följande tabell:

x	$-\infty$		0		∞
f''		$-$	$\wr$	$+$	
f		$\frown$	$\wr$	$\smile$	

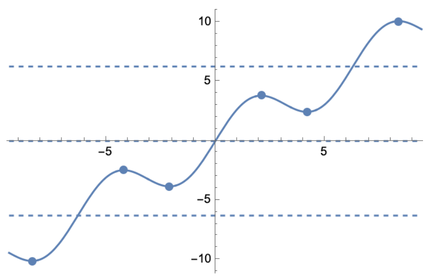
$f(x)$ är tydligen konkav på $]-\infty, 0[$ och konvex på $]0, \infty[$, men saknar inflexionspunkter.



3. Vi gör först en förenklad grafritning av $f(x) = x + 2\sin x$. $f'(x) = 1 + 2\cos x$ har de två följderna av nollställen (n heltal)

$$N_1 : x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad N_2 : x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$$

$f''(x) = -2\sin x$ och andraderivatkriteriet ger att punkterna i N_1 är maxpunkter och punkterna i N_2 är minpunkter. Vi får följande graf:



Vi noterar först att funktionen på varje intervall av typen $[2\pi m, 2\pi(m+1)]$ (m heltal) antar sitt minimum i vänstra ändpunkten och sitt maximum i den högra. Detta följer av att värdet i den lokala minpunkten $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi(m+1)$ är $2\pi m + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ som är större än värdet $2\pi m$ i den vänstra ändpunkten, och på motsvarande sätt inses att värdet i den lokala maxpunkten $\frac{2}{3}\pi + 2\pi m$ är mindre än värdet i den högra ändpunkten $[2\pi(m+1)]$. Det följer nu ur figuren att ekvationen för varje a har 1, 2 eller 3 lösningar, och att det finns två lösningar precis för dom värden på a som svarar mot lokala extremvärden. För följden N_1 motsvarar detta tal på formen $a = \frac{2}{3}\pi + 2\pi n + \sqrt{3}$ och för N_2 mot tal på formen $a = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n - \sqrt{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

4. Vi observerar först, genom att sätta t eller s lika med noll, att $f(0,0) = 0$. Vi deriverar därefter vänsterleden i sambanden $f(t,2t) = 3\sin t$ och $f(2s,s) = 2s$, och får med hjälp av kedjeregeln

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f(t,2t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,2t)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t,2t)\cdot 2, \\ \frac{d}{ds}f(2s,s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(2s,s)\cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2s,s)\cdot 1. \end{cases}$$

Om vi i stället deriverar högerleden får

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(3\sin t) &= 3\cos t, \\ \frac{d}{ds}f(2s,s) &= 2. \end{cases}$$

Vi sätter högerleden lika med vänsterleden och samtidigt $t = s = 0$, och erhåller då ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & +2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) & = 3, \\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & +\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) & = 2, \end{cases}$$

med lösningen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{3}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{4}{3}$. Eftersom vi nu har både funktionens och derivatornas värden i origo kan vi bestämma tangentplanet till

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y,$$

dvs $z = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}y$.

5. I polära koordinater ges området av $1 \le r \le 2, -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$. Vi får

$$\iint_D x^2y^2\,dxdy =$$

$$\int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2 r\,d\theta\,dr =$$

$$\int_1^2 r^5\,dr \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

$(\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta))$

$$\left[\frac{1}{6}r^6\right]_1^2 \left[\frac{\theta}{8} - \frac{1}{32}\sin 4\theta\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$\left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi}{32}\right) = \frac{21}{2}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{21\pi}{16}.$$

6.a) Ekvationen är linjär. En integrerande faktor är $I = e^{x^2}$, vilket ger

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = 1,$$

där vi nu kan skriva om vänsterledet som en derivata:

$$D(e^{x^2}y) = 1 \Leftrightarrow e^{x^2}y = x + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger att $e^0\cdot 1 = 0 + C$, dvs $C = 1$. Vi får alltså lösningen

$$y = (x+1)e^{-x^2}.$$

b) Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

med de komplexa rötterna $r_\pm = -1 \pm i$. Den homogena ekvationen har därför lösningen

$$y_h = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x.$$

En partikulärlösning kan sökas med ansatsen $y_p = ax^2 + bx + c$, vilket ger $y' = 2ax + b$ och $y'' = 2a$. Insatt i ekvationen får vi

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = 2a + 2(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c)$$

som alltså ska sättas lika med högerledet x^2+x-1. Om vi nu jämför koefficienterna för de olika termerna får vi ekvationerna

$$2a = 1, \quad 4a+2b = 1, \quad 2a+2b+2c = -1,$$

med lösningarna $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$. Detta ger partikulärlösningen $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Vi får alltså sammantaget den allmänna lösningen $y = y_h + y_p =$

$$Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

/Martin Tamm/220118