Lösningar till Analys för naturvetare II, 14-06-2018

1. Beräkna resten av division med 9 av $90002^{256} + 632^{302}$.

$$90002^{256}+632^{302} \simeq 2^{256}+2^{302} \mod 9 \simeq 2\cdot(2^3)^{85}+4\cdot(2^3)^{100} \mod 9 \simeq 2\cdot(-1)^{85}+4\cdot(-1)^{100} \mod 9$$

$$\simeq -2+4 \mod 9 = 2.$$

2. (a) På en lapp står ordet ABRAKADABRA. Lappen klipps sönder i bitar, så att det på varje bit står precis en bokstav. Sedan väljs tre bitar och läggs efter varandra. Hur många olika bokstavsföljder kan bildas på detta sätt?

   I ordet ingår 5 stycken A, 2 stycken B, 2 stycken R, K och D (5 olika bokstäver). Det finns ett ord med alla A, 12 ord med två A, 12 ord med två B och 12 ord med tvåR. Resten av orden innehåller endast olika bokstäver. Det finns $6\binom{5}{3} = 60$ ord med olika bokstäver. Totalt $1 + 12 + 12 + 12 + 60 = 97$ ord.

   (b) Bestäm koefficienten framför x^{13} i utvecklingen av uttrycket $(x - (5x)^{-2})^{25}$.

   För att beräkna vilken term ger x^{13}, vi ställer upp en ekvation

$$x^i \cdot (x^{-2})^{25-i} = x^{13} \leftrightarrow i + (-2)(25-i) = 13 \leftrightarrow 3i = 63 \leftrightarrow i = 21.$$

   Enligt binomialsatsen får man följande term $\binom{25}{21}x^{21}\cdot(-5x^{-2})^4 = \binom{25}{21}(-5)^4x^{13} = 7906250x^{13}$. Svar 7906250.

3. (Positivt orienterat ON-system) Låt L_1 vara linjen genom $(1,0,1)$ med riktningsvektor $(1,1,0)$. Den skär planet $x+y+z=0$ i en punkt P. Bestäm P. Låt sedan L_2 vara linjen genom P som är normal till planet $x+y+z=0$. Bestäm på normalform en ekvation för det plan som innehåller både L_1 och L_2.

   L_1 ges av parametrisk framställning $(1,0,1)+t(1,1,0) = (1+t,t,1)$. Nät den träffar $x+y+z = 0$ då uppfyller t ekvationen $1+t+t+1 = 0$ dvs $t = -1$. Alltså $P = (0,-1,1)$. L_2 passerar genom P och har riktningsvektorn $(1,1,1)$. Bl.a. innehåller L_2 punkten $(1,0,2)$. För att hitta planet som innehåller L_1 och L_2 kan vi hitta det plan Π som passerar genom punkterna $(1,0,1); (0,-1,1)$ samt $(1,0,2)$. Om Π ges av ekvation $ax+by+cz+d = 0$ då gäller följande ekvationssystem

$$\begin{cases} a+c+d=0 \\ -b+c+d=0 \\ a+2c+d=0. \end{cases}$$

   Detta ger $c = 0$, $a = -d$ samt $b = d$. Planet ges av $x - y - 1 = 0$.

4. Låt $f(x) = e^{x^2} + \cos 3x + x^5 + 1$. Bestäm värdet av derivatan $f^{(10)}(0)$.

   Enligt Taylors formel kommer koefficienter framför x^{10} i Taylorutvecklingen av f vara lika med $f^{(10)}(0)/10!$. Sedan har man

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2! + x^6/3! + x^8/4! + x^{10}/5! + ...$$

$$\cos 3x = 1 - (3x)^2/2! + (3x)^4/4! - (3x)^6/6! + (3x)^8/8! - (3x)^{10}/10! + ...$$

Alltså

$$f(x) = 3+x^2(1-3^2/2!)+x^4(1/2!+3^4/4!)+x^5+x^6(1/3!-3^6/6!)+x^8(1/4!+3^8/8!)+x^{10}(1/5!-3^{10}/10!)+...$$

Slutligen $f^{(10)}(0) = 10!((1/5! - 3^{10}/10!) = 10!/5! - 3^{10}$.

5. a) Beräkna dubbelintegralen

$$I = \iint_D xydxdy,$$

där $D = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x\}$.

Man ska använda upprepad integration

$$I = \int_0^\pi xdx \left[\int_0^{\sin x} ydy\right] = \int_0^\pi xdx \left(\frac{y^2}{2}\right)|_0^{\sin x} = \int_0^\pi \frac{x\sin^2 xdx}{2}.$$

Notera att $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ vilket medför

$$I = \int_0^\pi \frac{xdx}{4} - \frac{1}{4}\int_0^\pi x\cos 2xdx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\int_0^\pi x\cos 2xdx.$$

Slutligen med hjälp av partiell integration fås

$$\int_0^\pi x\cos 2xdx = \frac{1}{2}x\sin 2x|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2xdx = 0.$$

Svar. $\frac{\pi^2}{4}$.

b) Beräkna dubbelintegralen

$$J = \iint_D (x^2 - y^2)^6 dxdy,$$

där D är fyrhörningen med hörn i $(-1,0), (0,-1), (1,0), (0,1)$.

Man använder variabelsubstitution $u = x + y,\ v = x - y$ som är ekvivalent till $x = (u + v)/2,\ y = (u - v)/2$. Man får

$$J = \iint_{-1\le u\le 1,\ -1\le v\le 1} (uv)^6 Jac \cdot dudv,$$

där Jac är absolutbeloppet av funktionaldeterminanten $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$.

Alltså

$$J = \frac{1}{2}\iint_{-1\le u\le 1,\ -1\le v\le 1} (uv)^6 dudv = \int_{-1}^1 u^6 du \cdot \int_{-1}^2 v^6 dv = \frac{u^7}{7}|_{-1}^1 \cdot \frac{v^7}{7}|_{-1}^1 = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}.$$

6. Låt e_1, e_2, e_3 vara ett positivt orienterat ON-system i rummet $\mathbb{R}^3$. Låt P_1 vara projektionen på planet $x = y$ och P_2 vara projektionen på planet $y = z$. Låt T vara en lineär transformation, som uppfyller $T(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, T(e_2) = e_2$, samt $T(e_3) = e_1$. Visa att T är inverterbar och bestäm matrisen för T^{-1}. Bestäm sedan matrisen till den sammansatta avbildningen $R := T^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2$.

Normalvektorn N av längd 1 till $x = y$ ges av $\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$. Projektionen P_1 ges av

$$(x,y,z) \mapsto (x,y,z) - ((x,y,z)\cdot N)N = (x,y,z) - \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{y-x}{2}, \frac{y-x}{2}, z\right).$$

Man har $P_1(e_1) = (1/2, 1/2, 0)$, $P_1(e_2) = (1/2, 1/2, 0)$, $P_1(e_3) = (0, 0, 1)$. I matrisform ges P_1 av $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Normalvektorn K av längd 1 till $y = z$ ges av $\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$. Projektionen P_2 ges av

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z) - ((x, y, z) \cdot K)K = (x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z)\frac{(0, 1, -1)}{\sqrt{2}} = \left(x, \frac{y - z}{2}, \frac{y - z}{2}\right).$$

Man har $P_2(e_1) = (1, 0, 0)$, $P_2(e_2) = (0, 1/2, 1/2)$, $P_2(e_3) = (0, 1/2, 1/2)$. I matrisform ges P_2 av $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

I matrisform ges T av $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Eftersom $\det T = -1$ så är T är inverterbar. Med hjälp av Gausseleimination fås $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Slutligen,

$$T^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$