Stockholms universitet, Matematiska institutionen

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 11 mars 2022, 8:00–13:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Alla hjälpmedel på pappersform är tillåtna (böcker, anteckningar, etc.).

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

Antag en homogen försäkringsportfölj med n kunder som vardera drabbas av antingen en eller ingen skada under det kommande året, oberoende av varandra och med skadesannolikhet p. Antag att skadebeloppet, om en skada sker, är exponentialfördelad med väntevärde μ tkr. Försäkringsbolaget har tecknat en återförsäkring av typ XL-skydd med brytpunkt l tkr. Antag att återförsäkringspremien bestäms som $1+\gamma$ gånger återförsäkringsbolagets förväntade skadekostnad. Bestäm väntevärdet för försäkringsbolagets totala kostnad för portföljen, inklusive återförsäkringspremien. (10 p)

Uppgift 2

Antag att ett Poisson(1000)-fördelat antal skadehändelser inträffar under 2022 och att tidpunkterna för dessa händelser är likformigt fördelat under året. Antag att varje skadehändelse genererar en utbetalning med fördröjning D år efter tidpunkten för skadehändelsen, där

$$\mathrm{P}(D \leq t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{6}\right)^{-3}, \quad t > 0.$$

Fördröjningstiderna för olika skadehändelser antas oberoende och oberoende av antalet skadehändelser. Bestäm väntevärdet för antalet skadehändelser 2022 givet att 600 utbetalningar har gjorts till och med 2024. (10 p)

Uppgift 3

I Tabell 1 visas, för $i \in \{1, \dots, 5\}$ och $j \in \{1, \dots, 3\}$, belopp $C_{i,j}$ som svarar mot summerade betalningar till följd av skador under skadeår i och utvecklingsår $1, \dots, j$. Beloppen för $i + j \leq 6$ är kända medan beloppen är okända för $i + j > 6$. Antag att belopp som svarar mot olika skadeår är oberoende och att det existerar konstanter f_1, f_2 och σ_1, σ_2 så att, för $j = 1, 2$,

$$\mathrm{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j}, \quad \mathrm{Var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2$$

(a) Bestäm betingat väntevärde och betingad varians för $C_{4,3} + C_{5,3}$ givet kända belopp $C_{i,j}$ med $i + j \leq 6$ uttryckta i de okända konstanterna f_1, f_2 och σ_1, σ_2. (5 p)

	1	2	3
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$\mathbf{C_{4,3}}$
5	$C_{5,1}$	$\mathbf{C_{5,2}}$	$\mathbf{C_{5,3}}$

Table 1: Skadedata $C_{i,j}$ med kända kumulativa utbetalningar ($i + j \leq 6$), samt framtida okända kumulativa utbetalningar för $i + j > 6$.

(b) Skatta betingat väntevärde och betingad varians för $C_{4,3} + C_{5,3}$ givet kända belopp $C_{i,j}$ med $i + j \leq 6$, uttryckta i dessa kända belopp. (5 p)

Uppgift 4

Betrakta ett försäkringsbolag med skulder och tillgångar. Antag att "nu" är tidpunkt 0 vilket svarar mot början av skadeår 1. Antag att utbetalningar p.g.a. skador sker i slutet av varje år och antag följande dynamik för den kumulativa skadekostnaden, för alla i,

$$C_{i,1} = f_0 + \sigma_0 \varepsilon_{i,1}, \quad C_{i,2} = f_1 C_{i,1} + \sigma_1 \varepsilon_{i,2},$$

där $\varepsilon_{i,j} \sim N(0,1)$ och oberoende för alla i, j. $C_{i,j}$ är kända för $i + j \leq 1$ men okända för $i + j > 1$. Det aktuella skuldkassaflödet motsvarar de inkrementella framtida skadekostnaderna p.g.a. skador under skadeår 0 och 1. Antag att försäkringsbolaget har tillgångar med värde K investerat i en 3-årig nollkupongsobligation. Antag att den kontinuerligt sammansatta räntan för alla löptider är konstant och lika med r. Bestäm $\mathrm{VaR}_{0.005}(A_1 - L_1)$, där A_1 och L_1 betecknar värdet av tillgångar respektive skulder om ett år (inklusive kassaflöden under det nuvarande året). Skulden värderas enligt traditionell aktuariell värdering: summan av diskonterade betingade väntevärden. Svaret ska ges i termer av givna storheter samt fördelningsfunktionen för $N(0,1)$. (10 p)

Uppgift 5

Betrakta ett försäkringsbolag vars totala skadekostnad under det kommande året kan uttryckas $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ där N är oberoende av $X, X_1, X_2, \ldots$ som i sin tur är oberoende och likafördelade. Tre återförsäkringstyper övervägs: proportionell återförsäkring, XL-skydd med brytpunkt svarande mot en 95%-kvantil, SL-skydd med brytpunkt svarande mot en 95%-kvantil. Beskriv fördelar och nackdelar med återförsäkringstyperna i situationerna (a) och (b):

(a) $\mathrm{P}(N \in \cdot) = \mathrm{Pois}(100)$, $F_X(x) = 1 - (1 + x/10)^{-3}$

(b) $\mathrm{P}(N \in \cdot \mid \Lambda) = \mathrm{Pois}(\Lambda)$, $\Lambda \sim \mathrm{Gamma}(4, 1/25)$, $X \sim \mathrm{Gamma}(2, 1)$

(10 p)

Uppgift 1

Sätt $\lambda = 1/\mu$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\max(X-l,0)] &= \int_0^\infty \mathrm{P}(\max(X-l,0)>z)dz = \int_0^\infty \mathrm{P}(X>z+l)dz \\
&= \int_l^\infty \mathrm{P}(X>z)dz = \Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}\Big]_l^\infty = \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda}
\end{aligned}$$

Detta ger

$$\mathrm{E}[\min(X,l)] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[\max(X-l,0)] = \frac{1}{\lambda}\Big(1-e^{-\lambda l}\Big)$$

Detta ger

$$\mathrm{E}\Bigg[\sum_{k=1}^N \min(X_k,l)\Bigg] = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[\min(X,l)] = \frac{np}{\lambda}\Big(1-e^{-\lambda l}\Big)$$

Liknande fås

$$\mathrm{E}\Bigg[\sum_{k=1}^N \max(X_k-l,0)\Bigg] = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[\max(X-l,0)] = \frac{np}{\lambda}e^{-\lambda l}$$

Förväntade totala kostnaden blir

$$\frac{np}{\lambda}\Big(1+\gamma e^{-\lambda l}\Big) = np\mu\Big(1+\gamma e^{-l/\mu}\Big)$$

Uppgift 2

Om tidpunkt 0 svarar mot 1 januari 2022 är utbetalningstiderna $T_k = U_k + D_k$. Notera att eftersom utbetalningstiderna är oberoende och oberoende av $N \sim \mathrm{Pois}(1000)$ gäller att

$$\sum_{k=1}^N I\{T_k \le 3\} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^N I\{T_k > 3\}$$

är oberoende och Poissonfördelade: $\mathrm{Pois}(1000\cdot \mathrm{P}(T\le 3))$ respektive $\mathrm{Pois}(1000\cdot \mathrm{P}(T>3))$. Alltså fås

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Bigg[N \mid \sum_{k=1}^N I\{T_k\le 3\} = 600\Bigg] &= \mathrm{E}\Bigg[\sum_{k=1}^N I\{T_k\le 3\} + \sum_{k=1}^N I\{T_k>3\} \mid \sum_{k=1}^N I\{T_k\le 3\} = 600\Bigg] \\
&= 600 + 1000\cdot \mathrm{P}(T>3).
\end{aligned}$$

Det återstår att beräkna $\mathrm{P}(T>3)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T>3) = \mathrm{P}(U+D>3) &= \int_0^1 \mathrm{P}(D>3-u)du \\
&= \int_0^1 \Big(1+\frac{3-u}{6}\Big)^{-3} du \quad \Big\{\text{sätt } y = 1+\frac{3-u}{6}\Big\} \\
&= \int_{4/3}^{3/2} 6y^{-3}dy = \Big[-3y^{-2}\Big]_{4/3}^{3/2} \\
&= 3\Big((4/3)^{-2} - (3/2)^{-2}\Big) = \frac{17}{48}
\end{aligned}$$

Uppgift 3

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[C_{4,3}+C_{5,3} \mid \mathcal{D}] &= \mathrm{E}[C_{4,3} \mid C_{4,1}, C_{4,2}] + \mathrm{E}[C_{5,3} \mid C_{5,1}] \\
&= f_2 C_{4,2} + \mathrm{E}[\mathrm{E}[C_{5,3} \mid C_{5,1}, C_{5,2}] \mid C_{5,1}] \\
&= f_2 C_{4,2} + f_1 f_2 C_{5,1} \\
\mathrm{Var}(C_{4,3}+C_{5,3} \mid \mathcal{D}) &= \mathrm{Var}(C_{4,3} \mid C_{4,1}, C_{4,2}) + \mathrm{Var}(C_{5,3} \mid C_{5,1}) \\
&= \sigma_2^2 + \mathrm{E}[\mathrm{Var}(C_{5,3} \mid C_{5,1}, C_{5,2} \mid C_{5,1})] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[C_{5,3} \mid C_{5,1}, C_{5,2}] \mid C_{5,1}) \\
&= 2\sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2
\end{aligned}
$$

Skattningar fås genom att ersätta $f_1, f_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ med motsvarande skattningar. Notera att viktade minsta kvadrat skattningar för f_k skiljer sig från chain ladder.

$$
\begin{bmatrix} C_{1,2} \\ C_{2,2} \\ C_{3,2} \\ C_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ C_{3,1} \\ C_{4,1} \end{bmatrix} f_1 + \sigma_1 \begin{bmatrix} e_{1,2} \\ e_{2,2} \\ e_{3,2} \\ e_{4,2} \end{bmatrix}.
$$

Detta kan skrivas $Y = A\beta + \sigma e$ vilket ger

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} Y \\
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} (Y - A\widehat{\beta})^{\mathrm{T}} (Y - A\widehat{\beta}),
\end{aligned}
$$

där $n = 4$ i detta fall. På samma sätt för skattning av f_2 och σ_2^2.

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_1 &= \frac{C_{1,1}C_{1,2} + \cdots + C_{4,1}C_{4,2}}{C_{1,1}^2 + \cdots + C_{4,1}^2} \\
\widehat{f}_2 &= \frac{C_{1,2}C_{1,3} + \cdots + C_{3,2}C_{3,3}}{C_{1,2}^2 + \cdots + C_{3,2}^2} \\
\widehat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{3}\Big((C_{1,2} - \widehat{f}_1 C_{1,1})^2 + \cdots + (C_{4,2} - \widehat{f}_1 C_{4,1})^2 \Big) \\
\widehat{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{2}\Big((C_{1,3} - \widehat{f}_2 C_{1,2})^2 + \cdots + (C_{3,3} - \widehat{f}_2 C_{3,2})^2 \Big)
\end{aligned}
$$

Uppgift 4

De inkrementella beloppen enligt skade- och utvecklingsår är

$$
\begin{aligned}
D_{0,2} &= C_{0,1}(f_1 - 1) + \sigma_1 \varepsilon_{0,2}, \\
D_{1,1} &= f_0 + \sigma_0 \varepsilon_{1,1}, \\
D_{1,2} &= D_{1,1}(f_1 - 1) + \sigma_1 \varepsilon_{1,2}.
\end{aligned}
$$

Skuldkassaflödet är $(X_1, X_2) = (D_{0,2} + D_{1,1}, D_{1,2})$. Detta ger

$$
\begin{aligned}
L_1 &= X_1 + e^{-r}\,\mathrm{E}[X_2 \mid X_1] \\
&= D_{0,2} + D_{1,1} + e^{-r}\,\mathrm{E}[D_{1,2} \mid D_{1,1}] \\
&= D_{0,2} + D_{1,1}(1 + e^{-r}(f_1 - 1)) \\
&= C_{0,1}(f_1 - 1) + \sigma_1 \varepsilon_{0,2} + (f_0 + \sigma_0 \varepsilon_{1,1})(1 + e^{-r}(f_1 - 1)) \\
&\overset{\mathrm{d}}{=} C_{0,1}(f_1 - 1) + f_0(1 + e^{-r}(f_1 - 1)) + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_0^2 (1 + e^{-r}(f_1 - 1))^2}\, Z
\end{aligned}
$$

där $Z \sim N(0,1)$. Vidare är $A_1 = Ke^r$. Därav följer att

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.005}(A_1 - L_1) &= -K + C_{0,1}(f_1 - 1) + f_0(1 + e^{-r}(f_1 - 1)) \\ &\quad + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_0^2(1 + e^{-r}(f_1 - 1))^2}\,\Phi^{-1}(0.995)\end{aligned}$$

Uppgift 5

(a) $\mathrm{E}[N] = \mathrm{Var}(N) = 100$ och med $\alpha = 3, \gamma = 10$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] = \frac{\gamma}{\alpha - 1} = 5, \quad \mathrm{E}[X^2] = \frac{2\gamma^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = 100,\\ \mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(N)\,\mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(X) = 10^4\end{aligned}$$

(b) Med $(a,b) = (2,1)$ fås $\mathrm{E}[X] = a/b = 2$, $\mathrm{Var}(X) = a/b^2 = 2$. Med $(\alpha, \beta) = (4, 1/25)$ fås

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[N] &= \mathrm{E}[\Lambda] = 100,\\ \mathrm{Var}(N) &= \mathrm{E}[N] + \mathrm{Var}(\Lambda) = 100 + \frac{\alpha}{\beta^2} = 100 + 100 \cdot 25 = 100 + 2500,\\ \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}(N)\,\mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(X)\\ &= (100 + 2500) \cdot 4 + 100 \cdot 2\\ &= 10^4 + 600\end{aligned}$$

I situation (a) drivs risken av skadebeloppens osäkerhet (skadebeloppens fördelning är tungsvansad, antalet skador är Poisson, dvs lättsvansad fördelning), i (b) av skadeantalets osäkerhet (antalet skador är negativ binomial och klart mer tungsvansad än Poisson, lättsvansade skadebelopp). Därför vore XL-skydd lämpligt i (a) och t.ex. SL-skydd i (b), givetvis beror valet även på hur skydden prissätts).