MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
28 maj 2021

Hjälpmedel: Kursbok och föreläsningsanteckningar. 15 poäng, inklusive bonus från vårens omgång, ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. Betrakta polynomet $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

   (a) Hitta alla rötter till $p(x)$ i $\mathbb{Z}_3$. 2p

   (b) Faktorisera $p(x)$ i irreducibla faktorer. 3p

2. Låt $\sigma = (1\ 7\ 6\ 3\ 2\ 9\ 10\ 5)(4\ 11\ 8)$ och $\tau = (1\ 5)(3\ 7)(4\ 2)(6\ 11)(8\ 10\ 9)$ vara element i den symmetriska gruppen S_{11}.

   (a) Bestäm σ^{-1} och τ^2 på cykelform. 1p

   (b) Bestäm ordningen av σ och $\tau\sigma$. 2p

   (c) Existerar det ett $k > 0$ så att ekvationen $\gamma\sigma^k = \tau\gamma$ med $\gamma \in S_{11}$ har en lösning? Om det existerar en lösning, skriv ner en lösning, och om ingen lösning existerar, bevisa att ingen lösning finns. 2p

3. Låt G, H vara två grupper och $f : G \to H$ en homomorfi mellan G och H (kom ihåg att f är en homomorfi precis då $f(gh) = f(g)f(h)$ för alla $g, h \in G$). Kalla identitetselementet i H för e_H.

   (a) Definiera $\ker f = \{g \in G | f(g) = e_H\}$. Bevisa att $\ker f$ är en delgrupp av G. 3p

   (b) Bevisa att om H är abelsk (kursboken kallar sådana grupper kommutativa), då är

   $$ghg^{-1}h^{-1} \in \ker f$$

   för alla $g, h \in G$. 2p

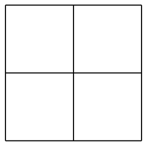
4. Låt C vara den linjära kod som definieras av checkmatrisen

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Finn alla kodord i C och beräkna det minsta avståndet för C. 3p

   (b) Låt nu $C \in \mathbb{Z}_2^n$ vara en *godtycklig* linjär kod som definieras av checkmatrisen H. Bevisa att det minimala avståndet för C är lika med det minimala antalet kolumner av H som är linjärt beroende. Kom ihåg att element $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}_2^n$ är linjärt beroende precis då det existerar element $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_2$, inte alla lika med noll, så att $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$. 2p

5. Betrakta figuren:



Låt X vara mängden av färgläggningar av varje kvadrat i denna figur med en av 10 färger, där åtminstone två av kvadraterna är färglagda med samma färg.

(a) Vad är kardinaliteten av X? 1p

(b) Kvadratens symmetrigrupp, som bekant består av åtta element, verkar på X. Bestäm antalet element i fixpunktsmängderna för varje element i gruppen. (Svaret ska, precis som vanligt, motiveras noggrant.) 3p

(c) Bestäm antalet banor, dvs. antalet ekvivalensklasser av färgläggningar av kvadraterna i figuren ovan, där två brickor anses ekvivalenta om de går att överföra i varandra genom vridning eller vändning. 1p

6. Åtta vänner skall äta mat på en picknick. De maträtterna som de har tagit med sig är falafelrulle, hamburgartallrik, och pizza. Det finns precis två falafelrullar och tre stycken hamburgartallrikar, och det finns ett obegränsat lager av pizza. Varje person i gruppen skall ta av exakt en maträtt. På hur många vis kan vännerna ta varsin rätt så att varje maträtt har valts av åtminstone en person? (**Svaret får uttryckas med hjälp av addition, subtraktion, multiplikation, division och fakultet.**) 5p

Lycka till!