MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
28 augusti 2021

**Lösningsförslag**

1. Betrakta $\sigma = (1\ 4\ 6\ 8\ 5)$, $\tau = (1\ 8)(2\ 7\ 9)(3\ 5)$ och $\pi = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$ som element i den symmetriska gruppen $S_9$.

   (a) Bestäm pariteten av $\sigma, \tau$ och $\pi$, dvs. bestäm för var och en av dessa permutationer, om de är jämna eller udda. 1p

   (b) Kan du hitta ett $\gamma \in S_9$ så att likheten $\gamma^2\sigma\gamma\tau\gamma = \pi$ gäller? Om det existerar ett $\gamma$, skriv ner det, och om ingen lösning existerar, bevisa att ingen lösning finns.
   (Ledtråd: använd föregående deluppgift) 2p

   (c) Kan du hitta ett $\gamma \in S_9$ så att likheten $\gamma\sigma\gamma = \tau$ gäller? Om det existerar ett $\gamma$, skriv ner det, och om ingen lösning existerar, bevisa att ingen lösning finns. 2p

   *Lösning:* Det är enkelt att se att $\sigma$ och $\tau$ är jämna permutationer, medan $\pi$ är en udda permutation. Nu, oavsett val av $\gamma$, så är uttrycket $\gamma^2\sigma\gamma\tau\gamma$ en jämn permutation. Å andra sidan så är $\pi$ en udda permutation, så vi ser alltså att ingen lösning existerar.

   För att lösa ekvationen $\gamma\sigma\gamma = \tau$ så börjar vi med att multiplicera båda leden med $\sigma$ för att få $\sigma\gamma\sigma\gamma = \sigma\tau$. Vi sätter nu $x = \sigma\gamma$ och ser att vår ekvation då ser ut som $x^2 = \sigma\tau$. Vi beräknar nu att $\sigma\tau = (1\ 4\ 6\ 8\ 5)(1\ 8)(2\ 7\ 9)(3\ 5) = (1\ 5\ 3)(2\ 7\ 9)(6\ 8\ 4)$. Vi söker alltså en kvadratrot av $\sigma\tau$ och man ser att man kan ta $x = (1\ 3\ 5)(6\ 4\ 8)(2\ 9\ 7)$. Eftersom att $x = \sigma\gamma$ så ser vi att $\gamma = \sigma^{-1}x = (5\ 8\ 6\ 4\ 1)(1\ 3\ 5)(6\ 4\ 8)(2\ 9\ 7) = (1\ 3\ 8\ 4\ 6)(2\ 9\ 7)$. Vi ser att således är $\gamma = (1\ 3\ 8\ 4\ 6)(2\ 9\ 7)$ en lösning. Om man vill kan man kontrollera: $(1\ 3\ 8\ 4\ 6)(2\ 9\ 7)(1\ 4\ 6\ 8\ 5)(1\ 3\ 8\ 4\ 6)(2\ 9\ 7) = (1\ 8)(2\ 7\ 9)(3\ 5)$.

2. (a) Lös ekvationen $g^{2018} = 1$ i $\mathbb{Z}_{21}$. 3p

   (b) Lös ekvationen $5g^{2107} = 75$ i $\mathbb{Z}_{205}$. 2p

   *Lösning:* Vi ser att $\varphi(21) = 12$, och $2018 = 2 \bmod 12$, så av Eulers sats så är vår ekvation till ekvationen $g^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_{21}$. Vi flyttar över 1 och ser att vi vill finna $g$ så att $g^2 - 1 = (g-1)(g+1) = 0$ i $\mathbb{Z}_{21}$. För att $(g-1)(g+1) = 0$ i $\mathbb{Z}_{21}$ så ser vi att det kan hända precis då antingen $g = \pm 1$ i $\mathbb{Z}_{21}$ (eftersom att då är någon av faktorerna noll), eller då produkten av faktorerna $(g-1)(g+1)$ är delbar med 21, men $g-1$ och $g+1$ är ej delbara med 21. Alla lösningar skilda från $\pm 1$ i $\mathbb{Z}_{21}$ fås alltså genom att hitta ett heltal $g$ mellan 1 och 21 så att någon av följande två fall inträffar :

   (a) $g - 1$ är delbart med 3 och $g + 1$ är delbart med 7

   (b) $g - 1$ är delbart med 7 och $g + 1$ är delbart med 3.

   Vi ser att det enda $g$ som uppfyller det första fallet är $g = 13$ och det enda som uppfyller det andra fallet är $g = 8$. Således är $g = 8$ och $g = 13$ de andra lösningarna till ekvationen $g^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_{21}$.

   För den andra deluppgiften så vill vi finna alla $g$ så att $5 \cdot g^{2107} = 75$ i $\mathbb{Z}_{205}$. Vi noterar att $205 = 5 \cdot 41$ och börjar därmed att lösa ekvationen $g^{2107} = 15$ i $\mathbb{Z}_{41}$. Vi ser att då $\phi(41) = 40$ och $2107 = 27$ modulo 40, att vi vill lösa ekvationen $g^{27} = 15$ i $\mathbb{Z}_{41}$. Vi hittar en invers till 27 i $\mathbb{Z}_{40}$ genom att använda Euklides algoritm (eller ser på en gång) och får att 3 är inversen. Således kan vi lösa ekvationen genom att beräkna $(g^{27})^3 = g = 15^3 = 13$ i $\mathbb{Z}_{41}$. Alla lösningar till ekvationen $5g^{2107} = 75$ är på formen $g = 13 + 41k$, så vi är nu klara.

3. Låt $G$ vara en grupp och låt $H$ och $K$ vara två delgrupper. Definiera en relation mellan element $g_1, g_2$ i G på följande sätt:

$$g_1 R g_2 \iff \text{ det existerar } h \in H \text{ och } k \in K \text{ så att } hg_1k = g_2.$$

   (a) Bevisa att R är en ekvivalensrelation 3p
   (**Det är viktigt att du tydligt motiverar de påståenden du gör i denna deluppgift** )

   (b) Låt nu $G = S_4$ vara den symmetriska gruppen på 4 element och låt $H$ vara delgruppen genererad av (1 2 3) och låt $K$ delgruppen genererad av (2 3 4) och låt $G/R$ vara ekvivalensklasserna som vi får om vi använder den ovan definierade relationen. Finn ekvivalensklassen innehållandes identitetselementet av $G$. Är ekvivalensklassen innehållandes identitetselementet en delgrupp av $G$? 2p

   *Lösning:* Vi bevisar att $R$ är en ekvivalensrelation. Om $g_1 \in G$ så har vi trivialt att $g_1 R g_1$ då vi kan välja $h$ och $k$ till att vara identiteten. Vi visar nu att $R$ är symmetrisk: om $g_1 R g_2$ så har vi att det existerar $h \in H$ och $k \in K$ så att $hg_1k = g_2$, men vi ser då att $g_1 = h^{-1} g_2 k^{-1}$, och eftersom att $H$ och $K$ är delgrupper så har vi att detta är en symmetrisk relation. För att se att den är transitiv: om $g_1 R g_2$ och $g_2 R g_3$ så finns $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$ så att $h_1 g_1 k_1 = g_2$ och $h_2 g_2 k_2 = g_3$, så man ser snabbt att $h_2 h_1 g_1 k_1 k_2 = g_3$ och eftersom $H$ och $K$ är delgrupper så följer transitivitet.

   Det gäller generellt att om $H$ och $K$ är delgrupper att mängden $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ är ekvivalensklassen innehållandes identitetselementet av $G$. I vårt fall har denna mängd 9 element och elementen är

$$\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\}.$$

   Vi har att $HK$ är ej en delgrupp i detta fall. Det finns flera sätt att se det på: allra enklast är att använda Lagranges sats som säger att om $HK$ vore en delgrupp så skulle ordningen av $HK$ dela ordningen av $G$, men 9 delar inte 24, så $HK$ är ingen delgrupp av $G$. Det går också att vara mer explicit och se att $HK$ ej är sluten med avseende på gruppoperationen: $(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 4)(2\ 3)$ som ej ligger i $HK$.

4. (a) För var och en av fallen nedan, avgör huruvida det finns en graf med sex hörn som har valenserna
   - (2,3,4,4,4,5)
   - (1,2,2,2,2,4)
   - (1,2,2,4,4,5)

   Om en graf med de givna valenserna existerar, konstruera grafen. Om en graf med de angivna valenserna ej existerar, bevisa detta. 3p

   (b) En graf med åtta hörn har valenserna $(1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, x)$ där vi antar att $x$ är ett heltal som uppfyller $1 \leq x \leq 5$. Vilka värden på $x$ är möjliga i detta intervall? Bevisa dina påståenden, så om du hävdar att en graf med ett specifikt $x$ existerar, konstruera ett exempel, och om du hävdar att ett visst värde på $x$ inte går, bevisa detta. 2p

*Lösning:* Det existerar ingen graf vars hörn har valenser $(1, 2, 2, 2, 2, 4)$ eftersom att summan av valenserna är 13 och vi vet att summan av valenserna måste vara ett jämnt tal. Det finns ingen graf som har valenserna $(1, 2, 2, 4, 4, 5)$. Exempelvis kan man se att om en sådan graf existerar, så måste det finnas en graf som har valenserna $(1, 1, 3, 3)$, och då måste det finnas en graf som har valenserna $(0, 0, 2)$, men detta kan såklart inte inträffa. För att se om en graf med valenserna $(2, 3, 4, 4, 4, 5)$ existerar så ser vi att en sådan graf existerar om och endast om en graf med valenserna $(1, 2, 3, 3, 3)$ existerar. I sin tur ser man att en av hörnen med valens 3 måste gå till hörnet valens 1 så en sådan graf existerar om och endast om en graf med valenserna $(0, 2, 2, 3, 3)$ existerar och en sådan graf konstruerar man enkelt.

Vi löser nu det andra problemet. Notera att summan av valenserna är $1+2+2+3+5+6+6+x = 25+x$, så eftersom att summan av valenserna skall vara ett jämnt tal, så måste $x$ vara udda, så vi ser att

$x$ potentiellt kan vara $1, 3, 5$ (7 exkluderas då det ej ligger i intervallet). Vi testar för olika fall och börjar med då $x = 1$. Vi hävdar att $x = 1$ inte går. Ty vi noterar att om en graf har valenserna $(1, 1, 2, 2, 3, 5, 6, 6)$ så kan högst 9 kanter från de fyra första hörnen gå till de tre sista hörnen. Men å andra sidan så måste minst 11 kanter gå från de tre sista hörnen till de fyra första hörnen, vilket är en motsägelse. Vi undersöker nu huruvida en graf med valenserna $(1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6)$ existerar. Man kan konstruera detta genom att t.ex. anta att hörnet med valens 1 är kopplad till ett hörn med valens 6 och ser då att en sådan graf existerar om och endast om en graf med valenserna $(2, 2, 3, 3, 5, 5, 6)$ existerar. Man noterar att en sådan graf existerar om och endast om en graf med valenserna $(1, 1, 2, 2, 4, 4)$ existerar. Vi noterar att i en sådan graf så kan inte ett hörn av valens 4 ha kanter till båda hörnen med valens 1, ty då skulle det andra hörnet med valens 4 ha för många kanter för att kunna distribuera över de kvarvarande. Så en graf med valenserna $(1, 1, 2, 2, 4, 4)$ existerar om och endast om en graf med valenserna $(1, 1, 1, 3)$ existerar och en graf med dessa valenser är väldigt enkel att konstruera. Således går $x = 3$. Vi undersöker nu fallet då $x = 5$, och undrar då alltså över huruvida en graf med valenserna $(1, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6)$ existerar. Notera att från de första fyra hörnen kan det högst gå 8 kanter till de fyra sista. Men å andra sidan så måste åtminstone 10 kanter från de sista fyra hörnen gå till de fyra första, vilket är en motsägelse.

5. Antag att du har 1000 urnor som alla är lagda på en rad. Du skall nu lägga in 811 (identiska) bollar i dessa urnor och ingen urna får innehålla fler än en boll. Måste det finnas en grupp av åtminstone 5 stycken på varandra direkt efterföljande urnor som alla innehåller en boll? 5p
*Lösning:* Vi numrerar lådorna i ordning från 1 till 1000, när vi tänker att nummer 1 avser urnan som är lagd längst till vänster, den med nummer 2 är den efterföljande direkt till höger, och så vidare. Vi delar nu in $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ i partitionerna

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{11, 12, 13, 14, 15\} \ldots \cup \{996, 997, 998, 999, 1000\}.$$

Vi har då 200 stycken olika partitioner och vi ser att vårt resultat följer av postfacksprincipen, så att det existerar en sådan grupp.

6. (a) Hur många omordningar av bokstäverna i ordet "UNDULATUNDRAN" innehåller inte delordet ULURU? 2p
(b) Hur många omordningar av bokstäverna i ordet "UNDULATUNDRAN" innehåller delordet DUN exakt en gång, men innehåller inte delorden ULURU eller RATA? 3p
(**Dina svar får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.** )

*Lösning:*

Vi börjar med att lösa den första deluppgiften. Vi ser att det finns tre stycken U:n, tre stycken N, två stycken D:n, två stycken A:n, ett L, ett T och ett R. Vi har då att det finns $\binom{13}{3,3,2,2}$ olika sätt att omordna bokstäverna i ordet. Om vi låter $X$ vara mängden av alla omordningar av bokstäverna i ordet och om $X_{UL}$ är mängden vars element är omordningar som innehåller delordet ULURU, så är kardinaliteten vi är ute efter

$$|X| - |X_{UL}|.$$

Det är enkelt att se att antalet omordningar som innehåller delordet ULURU är samma som antalet omordningar av "bokstäverna" ULURU, N,N,N,D,D,A,A,T och av en sats vi gått igenom på kursen ser man att det finns $\binom{9}{3,2,2}$ sådana omordningar. Således är antalet ord som inte innehåller delordet ULURU

$$\binom{13}{3,3,2,2} - \binom{9}{3,2,2} = 43228080.$$

För att lösa den andra uppgiften så låter vi $Y_{DU1}$ vara antalet omordningar som innehåller delordet DUN exakt en gång och $Y_{DU2}$ vara antalet omordningar som innehåller delordet DUN exakt två gånger . Vi ser då att antalet sätt att omordna bokstäverna DUN, U,U,N,N,D,A,A,L,T,R är samma som $Y_{DU1} + 2Y_{DU2}$.

Antalet sätt att ordna om dessa på är $\binom{11}{2,2,2}$. Å andra sidan ser man att antalet sätt att omordna DUN,DUN, N,U,A,A,L,T,R är samma som $Y_{DU2}$, så att $Y_{DU2} = \binom{9}{2,2}$. Vi ser då att

$$Y_{DU_1} = \binom{11}{2,2,2} - 2\binom{9}{2,2} = 4808160.$$

Vi vill nu beräkna antalet omordningar där DUN förekommer exakt en gång men där ULURU och RATA ej förekommer. Vi låter nu $Z_{UL}$ vara mängden omordningar som innehåller DUN exakt en gång och innehåller ordet ULURU, och $Z_{RA}$ vara mängden omordningar som innehåller DUN exakt en gång och innehåller ordet RATA. Vi vill beräkna $|Y_{DU1}|-|Z_{UL} \cup Z_{RA}|$ och vi använder inklusion-exklusion. Vi börjar med att notera att ULURU och DUN inte kan förekomma samtidigt, då det bara finns tre stycken U:n, så $|Z_{UL}|= 0$. För att beräkna $Z_{RA}$ så låter vi $Z_{RA2}$ vara de omordningar av bokstäverna så att DUN förekommer exakt två gånger och så att RATA förekommer. Det finns $\binom{8}{2,2}$ vis att omordna bokstäverna DUN, N,N,RATA,L,U,U,D och vi ser alltså att $\binom{8}{2,2} = |Z_{RA}|+2|Z_{RA2}|$ och man beräknar att $Z_{RA2}$ har kardinalitet

$$\frac{6!}{2!},$$

så att

$$|Z_{RA}|= \binom{8}{2,2} - 6! = 9360.$$

Man ser nu att $Z_{UL} \cap Z_{RA} = \emptyset$, så att antalet omordningar som innehåller delordet DUN exakt en gång och ej innehåller delorden ULURU eller RATA är

$$\binom{11}{2,2,2} - 2\binom{9}{2,2} - (\binom{8}{2,2} - 6!\,) = 4808160 - 9360 = 4798800.$$