MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
11 januari 2022

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna. 15 poäng, inklusive bonus, ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. På hur många vis kan du placera ut 33 stycken identiska bollar i tre stycken *identiska* lådor, om lådor dessutom får vara tomma? (Alla bollar måste alltså placeras ut i någon låda, men lådor får vara tomma. Så det är OK om en låda innehåller 33 bollar, resten ingen boll, eller om en innehåller 30 bollar, en annan tre bollar och den sista ingen boll). 5p
(**Dina svar för denna uppgift får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**) *Lösning:* Vi använder Burnsides lemma. Antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 33 \tag{1}$$

ger antalet sätt att distribuera 33 identiska bollar i distinkta lådor. Vi låter nu gruppen S_3 verka på lösningarna till ekvation (1) som följande: Om $\pi \in S_3$ och $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ löser ekvationen så är $\pi(a_1, a_2, a_3) = (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)})$. Antalet ekvivalensklasser under denna gruppverkan kommer då att vara antalet sätt att placera ut 33 stycken identiska bollar i tre stycken *identiska* lådor. Låt Y vara mängden av lösningar till Ekvation 1 så att, $|Y| = \binom{35}{2}$. Om nu e är identitetspermutationen, så är $|Y^e| = \binom{35}{2}$. Om $\pi = (12)$ så ser vi att en lösning (a_1, a_2, a_3) är fix under verkan av π om och endast om $a_1 = a_2$, så vi söker antalet lösningar till ekvationen $2x_1 + x_3 = 33$. För varje udda x_3 mellan 1 och 33 så har denna ekvation en unik lösning, så det finns totalt 17 olika lösningar med $a_1 = a_2$, vilket ger att $|Y^\pi| = 17$. På samma vis får man att om $\pi = (23)$, eller $\pi = (13)$ att $|Y^\pi| = 17$. Om π är en 3-cykel, t.ex. $\pi = (123)$ så ser man att en lösning (a_1, a_2, a_3) är fix om och endast om $a_1 = a_2 = a_3$, så vi söker då antalet lösningar till ekvationen $3x_1 = 33$, och denna har den unika lösningen $x_1 = 11$. Av Burnsides lemma så är antalet ekvivalensklasser

$$\frac{\binom{35}{2} + 3 \cdot 17 + 2}{6} = 108,$$

vilket alltså är svaret.

2. (a) Lös ekvationen $(3x + 2)(x + 2) = 0$ i $\mathbb{Z}_{35}$. 3p
(b) Lös ekvationen $x^{2045} + 7 = 9$ i $\mathbb{Z}_{37}$. 2p

Lösning: För att lösa *a*) så noterar vi att $x = -2$ är en lösning, och om vi kan lösa ekvationen $3x+2 = 0$ i $\mathbb{Z}_{35}$ så får vi en annan lösning. Vi kan notera att $12 \cdot 3 = 1$ i $\mathbb{Z}_{35}$,så om vi multiplicerar med 12 får vi att $x + 24 = 0$, dvs. $x = -24 = 11$. Så $x = 11$ är även en lösning. Slutligen skulle lösningar kunna uppkomma genom att $3x+2$ är en multipel av 5 och att $x+2$ är en multipel av 7, eller vice versa, men ingen är en multipel av 35. Vi ser att om $3x+2$ skall vara en multipel av 7 så är x på formen $7n+4$ för något n, och så i $\mathbb{Z}_{35}$ är de olika lösningarna $4, 11, 18, 25, 32$. På samma vis ser man att om $x + 2$ skall vara en multipel av 5 så är x på formen $3 + 5n$, så är alltså modulo 35 antingen $3, 8, 13, 18, 23, 28, 33$. De enda gemensamma värdena i denna lista är $x = 18$, så att 18 även är en lösning. Om man gör samma argument med att $x + 2$ skall vara en multipel av 7 och $3x + 2$ en multipel av 5 så ser man att då måste x vara 26 modulo 35. Så lösningarna är $-2, 11, 18, 26$.

För att nu lösa ekvationen i b) så subtraherar vi med 4 i båda led och noterar sedan att $2045 = 29$ modulo 36, så av Fermats lilla sats är ekvationen ekvivalent till $x^{29} = 2$. Vi vill nu hitta ett d så att $29d = 1$ modulo 36, ty isådanafall så kan vi höja upp till d i båda led och få lösningen till vår ekvation. Vi vill alltså lösa den diofantiska ekvationen $29d + 36n = 1$, som vi använder Euklides algoritm för att se har en partikulärlösning där $d = 5$. Så vi höjer upp båda led i 5 och får att $x = 2^5 = 32$. Så lösningen är $x = 32$.

3. Låt G vara en grupp. Två element $g_1, g_2 \in G$ kallas för konjugata om det existerar ett element $h \in G$ så att $hg_1h^{-1} = g_2$.

   a) Bevisa att relationen "att vara konjugata" är en ekvivalensrelation på gruppen G. 2p

   b) Om $g_1, g_2, g_3 \in G$, gäller det att $g_1g_2g_3$ alltid är konjugat till $g_2g_3g_1$? 1p

   c) Om nu G är symmetriska gruppen S_4, finn alla ekvivalensklasser för relationen där två element är ekvivalenta om de är konjugata till varandra. 2p

Lösning: Vi visar a). Relationen är reflexiv ty $g_1 \sim g_1$ eftersom vi kan ta $h = e$. Den är även symmetrisk, om $hg_1h^{-1} = g_2$ så är $g_1 = h^{-1}g_2h$. Slutligen om $hg_1h^{-1} = g_2$ och $kg_2k^{-1} = g_3$ så ser vi att $khg_1(kh)^{-1} = g_3$, så relationen är även transitiv.

För b) så är det sant. Ty om vi låter $h = g_1^{-1}$ så har vi att $hg_1g_2g_3h^{-1} = g_2g_3g_1$. För c) så har vi av känd sats från kursen att två permutationer är ekvivalenta om och endast om de har samma cykeltyp. De möjliga cykeltyperna är att det antingen är en enda 4-cykel, två 2-cykler, en 3-cykel, fyra 1-cykler, eller en 2-cykel, så detta ger ekvivalensklasserna.

4. Låt C vara den linjära kod som bestäms av checkmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Hitta alla ord i C. 1p

   b) Hur många fel rättar C? som mest? Kom ihåg att det är viktigt att visa att C rättar exakt det antal fel du påstår. 2p

   c) Antag att meddelandet $\mathbf{z} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ endast har ett fel. Rätta $\mathbf{z}$. 2p

Lösning: Vi radreducerar, vilket ej påverkar de ord som ligger i C och får att matrisen efter radreduktion är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dvs. orden i C är de $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ så att $x_1 = x_7, x_3 = x_6 + x_7, x_2 = x_5 + x_6, x_4 = x_5$. Således fås alla ord genom att låta x_5, x_6, x_7 variera. Det finns åtta ord och de är då alltså

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1),$$

samt

$$(0, 1, 1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1).$$

För att hitta hur många fel C rättar så kan vi t.ex. hitta minimiavståndet mellan två ord. Eftersom det är en linjär kod så är detta samma som minsta antalet ettor i ett nollskillt element. Vi beräknar att det minsta antalet ettor är tre, så detta är minimiavståndet. Således vet vi att C åtminstone rättar ett fel och man kan t.ex. se att C ej rättar två fel, ty då av känd sats i kursen så skulle minimiavståndet behöva vara åtminstone 5. Vi skall nu rätta meddelandet $\mathbf{z} = (1,0,1,1,0,0,1)$. Det finns flera sätt, men vi kan helt enkelt notera att om M är checkmatrisen, att $M\mathbf{z}^T$, där T är transponatet, är lika med $(0,0,0,1)^T$. Detta innebär, eftersom att alla kolumner är distinkta, att ett fel förekommer i den fjärde positionen, så det rättade kodmeddelandet vi söker är $(1,0,1,0,0,0,1)$.

5. Låt $X = \{$A,B,C,D, $\ldots,$ Å,Ä,Ö$\}$, dvs. X är mängden av bokstäver i det svenska alfabetet (och X har därmed 29 element).

   a) Hur många "ord" på tio bokstäver kan du bilda med hjälp av bokstäver från X där bokstaven A högst förekommer tre gånger? Bokstäver får förekomma flera gånger i samma ord. 2p

   b) Hur många "ord" på 42 bokstäver kan du bilda med hjälp av bokstäver från X där delordet som lyder: DENNATENTAÄRKUL förekommer, skrivet exakt så, någonstans i "ordet"? 3p
   (**Dina svar på dessa uppgifter får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**)

Lösning: För att lösa a) så noterar vi att antalet ord där A ej förekommer är 28^{10}, antalet ord där A förekommer en gång är $10 \cdot 28^9$ och antalet ord där A förekommer två gånger $10^2 \cdot 28^8$ och antalet ord där A förekommer tre gånger är $10^3 \cdot 28^7$. Av additionsprincipen så finns det

$$28^{10} + 10 \cdot 28^9 + 10^2 \cdot 28^8 + 10^3 \cdot 28^7 = 453254454575104$$

sådana ord.

För att lösa b) så noterar vi att DENNATENTAÄRKUL"innehåller 15 bokstäver. Det finns 28 platser att placera ut "DENNATENTAÄRKUL" på, det kan vara från plats 1 till 28. Så naivt skulle vi nu kunna tro att det finns $28 \cdot 29^{27}$ sådana ord, men vi dubbelräknar då det kan hända att "DENNATENTAÄRKUL" förekommer två gånger. Vi behöver alltså subtrahera antalet sätt där "DENNATENTAÄRKUL" förekommer två gånger. Det finns flera sätt att göra detta på men enklast är kanske följande resonemang. Betrakta: αDENNATENTAÄRKULβDENNATENTAÄRKULγ där α, β och γ är "ord" av längd a, b och c så att $a+b+c+30 = 42$, dvs. $a+b+c = 12$. För varje icke-negativ heltalslösning till ekvationen $a+b+c = 12$ så har vi 29^{12} olika sätt att placera ut resterande bokstäver. Det finns $\binom{14}{2} = 91$ lösningar till ekvationen $a+b+c = 12$, så att det finns $91 \cdot 29^{12}$ ord där DENNATENTAÄRKUL förekommer två gånger. Således har vi att totala antalet ord där "DENNATENTAÄRKUL" förekommer är $28 \cdot 29^{27} - 91 \cdot 29^{12} = 8548776728717468700084183171262751389225 4$.

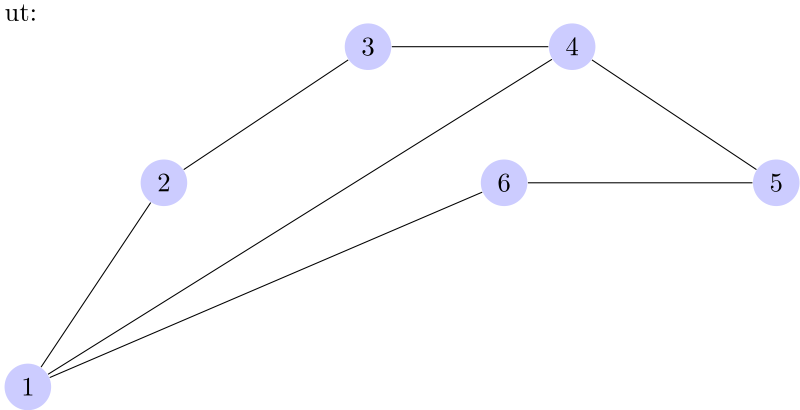
6. Betrakta följande tuplar av heltal

$$(5, 4, 3, 2, 1, 1)$$
$$(2, 2, 2, 2, 3, 3)$$
$$(3, 1, 4, 2, 3, 3)$$
$$(2, 2, 2, 2, 2, 1)$$
$$(2, 2, 2, 1, 4, 3)$$

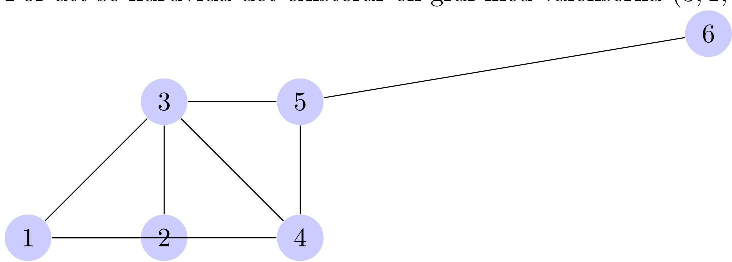
a) För var och en av dessa sextuplar, avgör om det existerar en **sammanhängande** graf med sex noder och grader som i den givna tupeln. Om ja, ge ett exempel. Om nej, bevisa att en sådan graf ej kan existera. 2p

b) För varje sextupel så att en sådan **sammanhängande** graf existerar, avgör huruvida grafen har ett Eulerspår och huruvida grafen har en Hamiltonstig. Om ja, ge ett exempel; om nej, bevisa att ett sådant spår / stig ej existerar. 3p

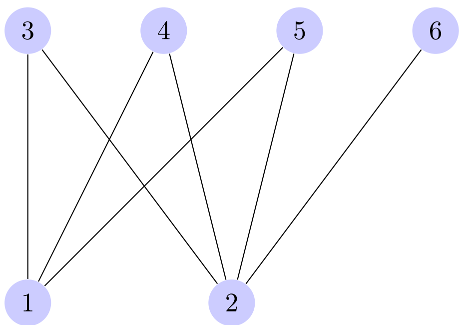
Lösning: I a) så noterar vi för den första tupeln att det finns en sådan graf om och endast om det finns en graf som har valenserna $(3, 2, 1, 0, 0)$ existerar och en sådan kan uppenbarligen inte existera. För att se att en graf med valenserna $(2, 2, 2, 2, 3, 3)$ existerar så existerar en sådan graf och den är lätt att rita ut:



För att se huruvida det existerar en graf med valenserna $(3, 1, 4, 2, 3, 3)$ så existerar en sådan graf:



Det finns ingen graf som har valenslistan $(2, 2, 2, 2, 2, 1)$ då summan av valenserna är udda. Slutligen så existerar en graf med valenserna $(2, 2, 2, 1, 4, 3)$. Ett exempel är då att rita den som följande:



För b) så noterar vi att en graf med valenserna $(2, 2, 2, 2, 3, 3)$ definitivt har en Eulerstig då det finns exakt två hörn som har udda valens. Den grafen vi skisserade (sexhörningen med ytterligare en kant mellan två hörn) har en Hamiltonstig, man kan bara gå cykliskt längs hörnen. För att notera om en graf med valenserna $(3, 1, 4, 2, 3, 3)$ har en Eulerstig så noterar vi att det inte kan finnas då det finns fler än två hörn med udda valens. För exemplet med en graf med valenserna vi gav så existerar däremot en Hamiltonstig (rita och se!) . Slutligen så betraktar vi en graf med valenserna $(2, 2, 2, 1, 4, 3)$. Detta har en Eulerstig då det finns exakt två hörn av udda valens. För ett exempel på en graf med denna valenslista så existerar ej en Hamiltoncykel då grafen är bipartit och det finns två hörn i ena hörnmängden och fyra i den andra hörnmängden.

Lycka till!