MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Linjär algebra, MM5012
Avd. Matematik	7.5 hp
Examinator: Sven Raum	Maj 3, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(1 poäng)** Definera begreppet ”linjär avbildning”.

   (b) **(1 poäng)** För ett naturligt tal $n \geq 1$ betrakta avbildningen $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ som uppfyller $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Låt $k \geq 1$ vara ett annat naturligt tal och $B \in \mathrm{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ en matris. Kontrollera att avbildningen från $\mathrm{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ till $\mathbb{R}$ som defineras genom formeln $A \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ är linjär.

   (c) **(3 poäng)** Låt $T : \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vara den linjära avbildningen som uppfyller

   $$T(A) = \mathrm{Tr}(AB)\,,$$

   där

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Definiera koordinater av en vektor relativ till en ordnad bas.

   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”basbytesmatris”.

   (c) **(3 poäng)** Betrakta vektorrummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$ med följande familjer av vektorer:

   $$\beta = (1 + x, x + 2x^2, 1 + x + x^2) \text{ och}$$
   $$\gamma = (x + x^2, 1 + x + x^2, 1 - x^2)\,.$$

   Visa att β och γ är baser för $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$ och beräkna basbytesmatris från β till γ.

3. (a) **(1 poäng)** Låt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vara ett inre-produktrum. Definiera normen på V som associeras med inre produkten.

   (b) **(4 poäng)** Betrakta punkterna

   $$t_0 = -1 \qquad y_0 = 2$$
   $$t_1 = 0 \qquad y_1 = 0$$
   $$t_2 = 1 \qquad y_2 = 1\,.$$

   Bestäm en minsta kvadratlösning till problemet att finna ett andragradspolynom $y = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$ som går genom dessa punkter.

4. (a) **(2 poäng)** Formulera spektralsatsen.

   (b) **(3 poäng)** Betrakta delrummet

   $$W = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 = z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 \right\} \subseteq \mathbb{C}^4\,.$$

   Låt $P : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ vara den ortogonala projektionen på W. Hitta matrisrepresentationen av P relativ till standard ortonormalbasen av $\mathbb{C}^4$.

5. (a) **(2 poäng)** Finn för vilka parametrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ matrisen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

är ortogonal.

   (b) **(3 poäng)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) **(5 poäng)** Formulera och bevisa Cauchy-Schwartz olikheten. Bevisa också att två vektorer v, w i ett inre-produktrum är linjärt beroende om $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$ gäller.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentanskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken https://survey.su.se/Survey/42570/sv.