STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM4001 Matematik för naturvetenskaper II
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-05-16

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(4+1 p.)** (a) Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen

$$49x + 161y = 700.$$

(b) Hur många lösningar har denna diofantisk ekvation i den tredje kvadranten ($x \leq 0$, $y \leq 0$)?

Lösning: (a) Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 161 &= 3 \cdot 49 + 14, \\ 49 &= 3 \cdot 14 + 7, \\ 14 &= 2 \cdot 7 + 0. \end{aligned}$$

Därför är SGD $(161, 49) = 7$, vilket delar högerledet 700, och det finns därmed lösningar. Vi löser ut resterna,

$$\begin{aligned} 7 &= 49 - 3 \cdot 14, \\ 14 &= 161 - 3 \cdot 49, \end{aligned}$$

och får

$$7 = 49 - 3(161 - 3 \cdot 49) = 10 \cdot 49 - 3 \cdot 161.$$

Alltså löser $(10, -3)$ hjälpekvationen $49x + 161y = 7$. Därför är

$$(x_0, y_0) = (1000, -300)$$

en lösning till den ursprungliga ekvationen. Den allmänna lösningen ges då av

$$\begin{cases} x &= 1000 - 161n, \\ y &= -300 + 49n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Ekvationen kan skrivas $y = \frac{700}{161} - \frac{49}{161}x$, och det beskriver en linje med negativ lutning som går igenom punkten $(0, \frac{700}{161})$. En sådan linje skär inte den tredje kvadranten, alltså innehåller den inga lösningar.

2. **(1+4 p.)** Betrakta funktionen $f(x) = 2e^x|x - 1|$ där $x \in \mathbb{R}$.

(a) Beräkna derivatan till f i alla punkter där f är deriverbar.

(b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen $f(x) = 1$.

(Beakta att själva lösningarna *inte* behöver beräknas.)

Lösning: (a) Vi har

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x(1-x), & x < 1, \\ 2e^x(x-1), & x \geq 1, \end{cases}$$

alltså är f deriverbar i alla punkter $x \neq 1$ och har derivatan

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^x, & x < 1, \\ 2xe^x, & x > 1. \end{cases}$$

(b) Vi undersöker funktionens monotoni och extrempunkter. Ekvationen $f'(x) = 0$ har endast lösningen $x = 0$. Därför kan funktionen byta monotonibeteendet endast i $x = 0$ och $x = 1$. Derivatan uppfyller $f'(x) > 0$ för $x < 0$ och $x > 1$, samt $f'(x) < 0$ för $0 < x < 1$. Alltså är f växande för $x < 0$ samt $x > 1$ och avtagande mellan 0 och 1. Dessutom har vi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$

Funktionens värden i extrempunkterna är

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = 0.$$

Skissar man grafen till f enligt dessa resultat, så ser man att den horisontella linjen $y = 1$ måste skära grafen precis tre gånger, alltså finns det 3 lösningar.

3. **(4 p.)** Låt matrisen A vara given som $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bevisa med induktion att

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$, dvs. för alla positiva heltal.

Lösning: Induktionsbas: för $n = 1$ har vi

$$A^n = A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alltså är påståendet sant för $n = 1$.

Induktionsantagande: Antag att påståendet stämmer för något $n \geq 1$, dvs.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

för något n.

Induktionssteg: Vi vill visa att

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gäller för det valda n. Vi har

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

där vi använt induktionsantagandet i det andra steget. Beviset är klart.

4. **(3+3 p.)** (a) Skissa området D_1 som ges av $0 \leq x \leq 1$ samt $0 \leq y \leq 3-2x$ och beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{D_1} x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(b) Beräkna

$$\iint_{D_2} \sin\sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

där D_2 begränsas av cirklarna $x^2+y^2=\pi^2$ och $x^2+y^2=4\pi^2$.

Lösning: (a)

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{3-2x} x^2 y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^2y^2\right]_{y=0}^{3-2x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(9x^2 - 12x^3 + 4x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[3x^3 - 3x^4 + \frac{4}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

(b) I polära koordinater får vi

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} \sin\sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} r\sin r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_\pi^{2\pi} r \sin r \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left(\left[-r\cos r\right]_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} \cos r \, \mathrm{d}r\right) = -6\pi^2.\end{aligned}$$

5. **(2+3 p.)** (a) Med avseende på en ON-bas, låt P beteckna den ortogonala projektionen på planet $3x-4z=0$ i rummet. Beräkna matrisframställningen till P.

(b) Betrakta den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som i standardbasen ges av

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Vilken matrisframställning har F i basen $\mathbb{B} = \left(\binom{1}{-1}, \binom{1}{1}\right)$?

Lösning: (a) Planet har $\vec{n} = (3,0,-4)^\top$ som normalvektor. Ortogonalprojektionen ges alltså av

$$\begin{aligned}P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{3x-4z}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}z \\ y \\ \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Matrisframställningen är därför

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 12 \\ 0 & 25 & 0 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Basbytesmatrisen Q från standardbasen till $\mathbb{B}$ är

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessutom har F matrisframställningen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. Därför är matrisframställningen av F i basen $\mathbb{B}$

$$A_{\mathbb{B}} = QAQ^{-1} = \cdots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. **(2+3 p.)** Låt $f(x, y) = x(y^2 - 2y)$.

(a) För varje (x_0, y_0) beräkna tangentplanet till grafen av f i punkten $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(b) Bestäm alla punkter i vilka tangentplanet till grafen av f är parallellt till planet $y = z$.

Lösning: (a) Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(2y - 2).$$

Alltså uppfyller tangentplanet i (x_0, y_0) ekvationen

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= x_0(y_0^2 - 2y_0) + (y_0^2 - 2y_0)(x - x_0) + x_0(2y_0 - 2)(y - y_0). \end{aligned}$$

(b) Tangentplanet har $(y_0^2 - 2y_0, x_0(2y_0 - 2), -1)^\top$ som normalvektor, och vi vill att den är parallell till en normalvektor till $y = z$. En sådan är $(0, 1, -1)$. Vi vill alltså lösa

$$\begin{pmatrix} y_0^2 - 2y_0 \\ x_0(2y_0 - 2) \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

för $\lambda \in \mathbb{R}$. Den tredje raden ger $\lambda = 1$. Den första ger $y_0 = 0$ eller $y_0 = 2$. Stoppar man in dessa möjligheter i den andra ekvationen så får man följande lösningar:

$y_0 = 0$: $x_0 = -\frac{1}{2}$.

$y_0 = 2$: $x_0 = \frac{1}{2}$.

Det finns alltså två punkter i vilka tangentplanet är parallellt till $y = z$, nämligen

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{och} \quad \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.