MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Analys A,
7,5 hp,
220303

Minst 7,5 poäng (inklusive bonus) på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras.

Problemdel

1. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln(\sqrt{k}+1)-\ln\sqrt{k}\right), \qquad b)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln(k^2+1)-\ln k^2\right).$$

3 p

2. Undersök om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i förekommande fall:

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-\cos(xy)+y^2}{x^2+\cos(xy)+y^2}, \qquad b)\quad \lim_{x^2+y^2\to\infty}\frac{x^2-\cos(xy)+y^2}{x^2+\cos(xy)+y^2}.$$

3 p

3. a) Bestäm den allmänna lösningen till följande partiella differentialekvation:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+f=x+y.$$

(Ett linjärt variabelbyte kan underlätta.) 2 p

b) Bestäm den lösning till differentialekvationen i a) som är identiskt noll då $x+y=0$. 1 p

4. Betrakta följande funktion på $\mathbb{R}^3\setminus(0,0,0)$:

$$f(x,y,z)=3\ln(x^2+y^2+z^2)-xy-yz-zx.$$

a) Bestäm alla f:s stationära punkter och avgör deras karaktär (max, min eller sadelpunkt). 2 p

b) Bestäm supremum och infimum samt globalt max och min i förekommande fall. 1 p

5. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y)=x^3y^3$ under bivillkoret

$$x^3+y^3+6xy=8.$$

3 p

Teoridel

6. Formulera och bevisa Maclaurins formel i en variabel. 3 p

7. Definiera begreppen positivt och negativt definit, indefinit samt positivt och negativt semidefinit kvadratisk form. Formulera och bevisa sats om hur den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen avgör karaktären hos en stationär punkt (endast fallet med 2 variabler och en indefinit kvadratisk form behöver behandlas). 3 p

LYCKA TILL!

Skrivningsresultatet kommer att finnas tillgängligt senast måndag den 10 mars (sannolikt tidigare). Beslut om återlämning av tentorna kommer att fattas med hänsyn till rådande omständigheter och meddelas via kurssidan.