STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,
Examinator: Per Alexandersson

Tentamen i
Linjär algebra för lärare, fortsättningskurs
20 augusti 2013 kl $09^{00} - 14^{00}$

Hjälpmedel: Enbart penna och radergummi. Alla svar skall motiveras!

1. Bestäm determinanten till följande matris, samt dess rang för alla värden på x :
$$\begin{pmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
10p

2. En linjär avbildning F på rummet av reella 2×2-matriser definieras av att
$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ för alla } a, b, c, d \in \mathbf{R}$$
   (a) Bestäm F:s avbildningsmatris, med avseende på basen
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Bestäm alla egenvärden till avbildningsmatrisen i (a), *eller* den alternativa matrisen längst ned på sidan.
   (c) Är matrisen i (b) diagonaliserbar? Motivera!

10p

3. En linjär avbildning $T : P_2(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$ (polynom av grad max 2, till polynom av grad max 2), har avbildningsmatrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i basen } 1, x, x^2.$$
   (a) Beräkna $T(1 + x + x^2)$.
   (b) Bestäm de vektorer i A:s bildrum[1], som också ligger i det rum som spänns upp av vektorerna $(1, 0, -1)^T$ och $(1, 0, 1)^T$.

10p

4. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{v} = (1, 2, 0, 1)$ på det delrum $U \subset \mathbf{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 1, 1)$ och $(2, 2, 4, 4)$.
   Tips: Bestäm en ON-bas $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ *i* U. *Den ortogonala projektionen ges då av* $(\mathbf{f}_1|\mathbf{v})\mathbf{f}_1 + (\mathbf{f}_2|\mathbf{v})\mathbf{f}_2$.

10p

5. Bestäm $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ genom att använda dig av diagonalisering. 10p

Alternativ matris till Uppgift 2b och 2c: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lycka till!

Skicka ett mail till per@math.su.se för information om tentamensresultat.

[1] de vektorer som spänns upp av kolonnerna i matrisen