Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 9 juni 2022

1. (a) Euklides algoritm blir:

$$\begin{aligned} 34\,374 &= 2 \cdot 14\,154 + 6066 \\ 14\,154 &= 2 \cdot 6066 + 2022 \\ 6\,066 &= 3 \cdot 2022, \end{aligned}$$

så $\mathrm{SGD}(34\,374, 14\,154) = 2022$. Vi får att $14\,154x \equiv 0 \pmod{34\,374}$ blir

$$34\,374 \mid 14\,154x \;\Leftrightarrow\; 2022 \cdot 17 \mid 2022 \cdot 7x \;\Leftrightarrow\; 17 \mid 7x \;\Leftrightarrow\; 17 \mid x,$$

eftersom $\mathrm{SGD}(17, 7) = 1$, så det minst möjliga positiva heltalet är $x = 17$.

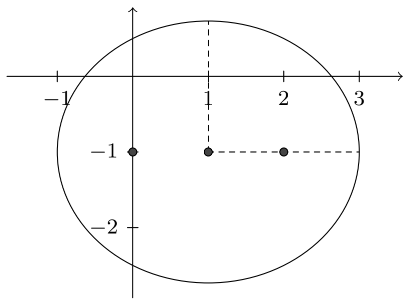
(b) Vi får att $A^c = (-\infty, 1]$ och $B \cup C = (-2, 2]$, så

$$M = A^c \cap (B \cup C) = (-\infty, 1] \cap (-2, 2] = (-2, 1].$$

2. (a) Efter kvadratkomplettering får vi den normaliserade ekvationen

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Från detta ser vi direkt att medelpunkten är $(1, -1)$, halvaxeln i x-led är 2, och halvaxeln i y-led är $\sqrt{3}$. Vidare, om storaxeln är a $(= 2)$, lillaxeln är b $(= \sqrt{3})$, och avståndet från medelpunkten till brännpunkterna är c gäller $a^2 = b^2 + c^2$. Vi får därmed att $c = 1$, så brännpunkterna är $(1 \pm 1, -1)$. Nu kan vi skissa grafen:



(b) i. Med multiplikationsprincipen fås $5^4 = 625$ koder.

ii. Det finns totalt 10^4 PIN-koder, de förbjudna är de 5^4 med bara udda samt de 5^4 med bara jämna siffror. Alltså får vi $10^4 - 5^4 - 5^4 = 10\,000 - 2 \cdot 625 = 8\,750$ tillåtna koder.

iii. Om man först väljer vilka 2 av de 4 sifferpositionerna som skall vara udda så får man $\binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 3\,750$ möjligheter.

3. (a) Vi får

$$\vec{f}_1 = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_1$$

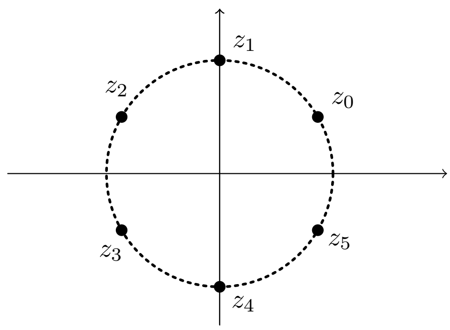
och

$$\vec{f}_2 = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_1$$

så $\begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} A$, där $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. Därmed är $\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} A^{-1}$. Med (valfri) standardmetod får vi att $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ så $\vec{e}_1 = -\frac{3}{2}\vec{f}_1 + \frac{3}{2}\vec{f}_2$ och $\vec{e}_2 = -3\vec{f}_1 + \vec{f}_2$. Om vektorn $\vec{v}$ har koordinatmatrisen $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ så har $\vec{v}$ koordinatmatrisen $Y = A^{-1}X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$.

(b) Eftersom $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec{e}_2 = -\frac{3}{2}\vec{f}_1 + \frac{1}{2}\vec{f}_2$ är kordinaterna för C i koordinatsystemet $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. (a) Vi skall lösa $z^6 = -64$. Ansätter vi lösningen på polär form $z = re^{\theta i}$ fås $r^6 e^{6\theta i} = 64e^{\pi i}$. Vi behöver alltså $r^6 = 64$ och $6\theta = \pi + 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$. Vilket ger $r = 2$ och $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$. Sätter vi in $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ fås lösningarna $z = \pm 2i$, och $z = \pm\sqrt{3} \pm i$. Dessa nollställen bildar en regelbunden 6-hörning på cirkeln med radie 2 och centrum i origo i det komplexa talplanet:



(b) Parar vi ihop konjugerade nollställen får vi $p(z) =$

$$\Big((z-2i)(z+2i)\Big)\Big((z-\sqrt{3}-i)\Big(z-\sqrt{3}+i\Big)\Big)\Big((z+\sqrt{3}-i)(z+\sqrt{3}+i)\Big)$$
$$= (z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)(z^2+2\sqrt{3}z+4).$$

5. (a) Sätter vi in koordinaterna för punkterna på linjen i planets ekvation får vi $2(3+t) + (5+2t) + (-2-t) = 3$, som har lösningen $t = -2$. Skärningspunkten är därmed $(1, 1, 0)$. Vinkeln θ mellan linjens riktningsvektor $\vec{v} = (1, 2, -1)$ och planets normal $\vec{n} = (2, 1, 1)$ fås av $\cos\theta = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, så $\theta = \pi/3$. Vinkeln med planet är därmed $\pi/2 - \theta = \pi/6$.

(b) Eftersom punkten $(3, 5, -2)$ på linjen inte ligger i planet, räcker det att riktningsvektorn $\vec{v} = (a, 2, a^2 - 2)$ är ortogonal mot $\vec{n}$. Vi får $0 = \vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \cdot a + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (a^2 - 2) = a(a+2)$, så $a = 0$ eller $a = -2$.

6. (a) Första speglingen uppfyller $S_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, $S(\vec{e}_2) = \vec{e}_3$, $S(\vec{e}_3) = \vec{e}_2$, så S_1 har matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ och den andra spegingen S_2 har matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, så F har matrisen

$$F = S_2 S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Om $\vec{u} = (x, y, z)$ så blir $F(\vec{u}) = \vec{u}$ ekvationen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

som förenklas till ekvationerna $x = 0$ och $y = z$, så $(x, y, z) = (0, t, t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Denna linje måste vara speglingslinjen, eftersom punkterna på den är precis de som inte förändras av F, och en riktningsvektor till den är $\vec{u} = (0, 1, 1)$.