Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

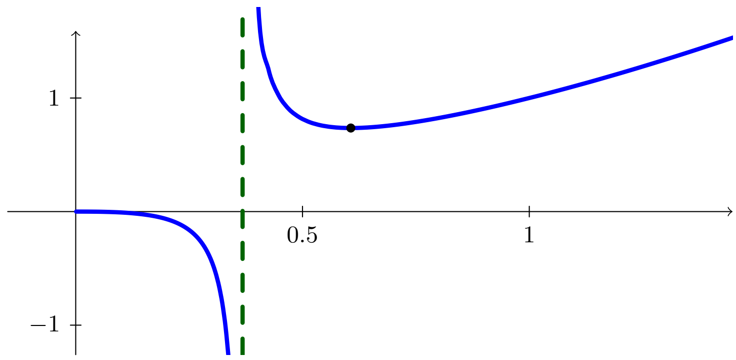
Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 14 juni 2022

1. (a) Eftersom $|x-1| = -(x-1)$ då $x < 1$ får vi om vi förlänger med konjugatuttrycket
$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{|x-1|} = \lim_{x\to 1-} \frac{(x^2+8)-3^2}{-(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to 1-} \frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3} = -\frac{1}{3}.$$
(b) Med standardutvecklingarna $\sin(t) = t - t^3/3! + O(t^5)$, $\ln(t) = t + O(t^2)$ då $t \to 0$ får vi
$$\frac{\pi \ln(1+x^3) - x^2 \sin(\pi x)}{x^5} = \frac{\pi(x^3 + O(x^6)) - x^2(\pi x - \pi^3 x^3/6 + O(x^6))}{x^5}$$
$$= \frac{\pi^3 x^5/6 + O(x^6)}{x^5} = \frac{\pi^3}{6} + O(x) \to \frac{\pi^3}{6}$$
då $x \to 0$.

2. (a) Funktionen $f(x) = \frac{x^2}{1+\ln(x)}$ är definierad då $x > 0$ och $1 + \ln(x) \neq 0$, så $D_f = (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, \infty)$. Möjliga vertikala asymptoter är därmed $x = 0$ och $x = e^{-1}$. Vi får dock $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ så $x = 0$ är ingen asymptot, däremot är $\lim\limits_{x\to e^{-1}-} f(x) = -\infty$ och $\lim\limits_{x\to e^{-1}+} f(x) = \infty$, så $x = e^{-1}$ är en asymptot.
Vi skulle även kunna ha en sned asymptot då $x \to \infty$, men en sådan skulle ha lutning $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ så detta är inte fallet.
Vi får $f'(x) = \frac{x(1+2\ln(x))}{(1+\ln(x))^2}$, vilket ger att $f'(x) = 0$ endast för $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Vi gör en teckentabell

x	(0)		$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$	≀	-	≀	-	0	+
$f(x)$	(0)	↘	≀	↘	$\frac{2}{e}$	↗

Från teckentabellen ser vi att funktionen har ett lokalt minimum för $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$, men inga andra lokala extremvärden. Vi skissar grafen



(b) Utifrån det vi kom fram till ovan, samt det faktum att $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, så har ekvationen $f(x) = a$ en unik lösning x precis då $a < 0$ eller då $a = \frac{2}{e}$.

3. Genom att rita en figur av området D ser man att det kan beskrivas av olikheterna $0 \le y \le 1$ och $y \le x \le \sqrt{y}$, så
$$\iint_D \frac{xe^y}{y}\, dA = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} \frac{xe^y}{y}\, dx \right) dy = \int_0^1 \frac{e^y}{y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^y(1-y)\, dy$$
$$= [PI] = \frac{1}{2} \left(\left[e^y(1-y) \right]_0^1 - \int_0^1 e^y(-1)\, dy \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \int_0^1 e^y\, dy \right) = \frac{e-2}{2}.$$

4. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får $\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3 \end{cases}$ vilket ger punkten $(x, y) = (3/2, 3/2)$ som däremot inte uppfyller $x^2 + y^2 \leq 4$, så den ligger utanför området.

   Vi undersöker nu randkurvan $x^2 + y^2 = 4$ för $y > 0$, som är en halvcirkel med radie 2. Vi parametriserar denna genom $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ för $0 < t < \pi$. Sätter vi in detta i funktionen får vi

$$h(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4 - 3(\cos(t) + \sin(t)).$$

   Vi får $h'(t) = 3(\sin(t) - \cos(t))$ så $h'(t) = 0$ omm $\tan(t) = 1$, vilket inom vårt intervall ger $t = \pi/4$ så vi får kandidatpunkten $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   Längs randen $y = 0$, $-2 < x < 2$ får vi

$$g(x) = f(x, 0) = x^2 - 3x$$

   så $g'(x) = 2x - 3 = 0$ då $x = 3/2$, vilket ger kandidaten $(x, y) = (3/2, 0)$.

   Slutligen har vi hörnpunkterna $(\pm 2, 0)$ som är kandidater.

   Vi jämför funktionsvärdena:

(x, y)	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(-2, 0)$	$(3/2, 0)$	$(0, 2)$
$f(x, y)$	$4 - 6\sqrt{2}$	10	$-9/4$	-2

   så minsta värdet är $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 - 6\sqrt{2}$ och det största $f(-2, 0) = 10$.

5. (a) Vi låter $f(x) = x^{-b}$. Med formeln för rotationsvolym får vi att volymen ges av

$$V_1 = \pi \int_1^\infty f(x)^2 \, dx = \pi \int_1^\infty x^{-2b} \, dx.$$

   Vi erinrar oss nu att en integral $\int_1^\infty x^{-p} \, dx$ är konvergent om och endast om $p > 1$, så vi behöver $2b > 1$ dvs att $b > 1/2$. Då får vi volymen

$$V_1 = \pi \lim_{R \to \infty} \int_1^R x^{-2b} \, dx = \pi \lim_{R \to \infty} \left[\frac{x^{1-2b}}{1 - 2b} \right]_1^R = \frac{\pi}{2b - 1}.$$

   (b) Med formeln för cylindriska skal (rörformiga element) får vi volymen

$$V_2 = 2\pi \int_1^\infty x f(x) \, dx = 2\pi \int_1^\infty x^{1-b} \, dx.$$

   Denna generaliserade integral är konvergent om och endast om $1 - b < -1 \Leftrightarrow b > 2$, och då får vi

$$V_2 = 2\pi \lim_{R \to \infty} \left[\frac{x^{2-b}}{2 - b} \right]_1^R = \frac{2\pi}{b - 2}.$$

6. (a) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' + 9y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 9 = 0$, med lösningar $r = \pm 3i$, så $y_h = A\sin(3x) + B\cos(3x)$, för $A, B \in \mathbb{R}$.

Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p = Ce^{2x}$, så $y_p'' = 4Ce^{2x}$ så vi får $y_h'' + 9y_h = 13Ce^{2x}$ vilket skall vara lika med e^{2x}, vilket betyder att $C = 1/13$, så $y_p = \frac{1}{13}e^{2x}$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y = y_p + y_h = A\sin(3x) + B\cos(3x) + \frac{1}{13}e^{2x}.$$

Detta ger $y' = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) + \frac{2}{13}e^{2x}$, så begynnelsevillkoren blir $y(0) = B + \frac{1}{13} = 0$ och $y'(0) = 3A + \frac{2}{13} = 0$, så $A = -\frac{2}{39}$ och $B = -\frac{1}{13}$. Svaret är således att $y(x) = \frac{1}{39}(3e^{2x} - 2\sin(3x) - 3\cos(3x))$.

(b) Differentialekvationen $(1+x)y' - y - y^2 = 0$ är separabel. Om vi skriver om den som $\frac{y'}{y(y+1)} = \frac{1}{x+1}$ och integrerar båda sidor får vi, mha partialbråksuppdelningen $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$ att $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|1+x| + C$, vilket ger $\frac{y}{y+1} = A(x+1)$, där $A = \pm e^C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ får vi $A = 1/2$, vilket ger att $y(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.