

STOCKHOLMS UNIVERSITET,
MATEMATISKA INSTITUTIONEN,
Avd. Matematisk statistik

Tentamen - Sannolighetsteori I (MT3001)
9 januari 2017, 9-14

Examinator: Kristoffer Lindensjö, kristoffer.lindensjo@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.

Återlämning: 19 januari, kl 15.00-15.30. Rum 321, hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang ska vara klara och tydliga att följa. Svar ska motiveras om inte annat framgår. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Lycka till!

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att skriva ner numret på det rätta alternativet. Varje rätt svar ger 2 poäng. Svaren behöver inte motiveras.

(a) Hur många pokerhänder finns det? (En pokerhand består av 5 olika kort valda bland 52 kort där ordningen på de 5 korten saknar betydelse.)

1. 52^5
2. $\binom{52}{5}$
3. $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$

(b) Ett mynt kastas två gånger. Låt $A =$ 'Det blir krona i första kastet', $B =$ 'Det blir krona i andra kastet', och $C =$ 'Det blir samma utfall i båda kasten'. Vad gäller?

1. De tre händelserna är oberoende
2. De tre händelserna är parvis oberoende men det gäller inte att $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
3. De tre händelserna är inte parvis oberoende

(c) Antag att E och F är oberoende och att F och G är oberoende. Följer det att E och G är oberoende?

1. Ja
2. Nej

(d) Låt X vara en stokastisk variabel med $E[X]=5$ och $\text{Var}(X)=10$. Vad är $\text{Var}(-X)$?

1. $\text{Var}(-X) = -10$
2. $\text{Var}(-X) = 5$
3. $\text{Var}(-X) = 10$
4. $\text{Var}(-X) = -15$

(e) Låt $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ och definiera $Y = X^3$. Vad är sant?

1. $Y \sim \text{Exp}(3\lambda)$
2. Y är inte exponentialfördelad
3. $Y \sim \text{Exp}(\frac{\lambda}{3})$

Uppgift 2

En apelsinbonde har noterat att apelsinernas vikter i gram kan ses som oberoende slumpvariabler fördelade enligt $N(\mu, \sigma^2)$, där $\mu = 100$ och $\sigma = 10$.

- (a) Beräkna sannolikheten att en apelsin väger mindre än 105 gram. (4 p)
- (b) Beräkna sannolikheten att 100 apelsiner tillsammans väger mindre än 10500 gram. (4 p)
- (c) Beteckna en apelsins vikt med X , beräkna $E[X^2]$. (2 p)

Uppgift 3

Låt $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ och $Y \sim \text{Po}(\lambda_1)$ vara oberoende slumpvariabler. Låt $Z = X + Y$.

- (a) Beräkna $E[Z]$. (1 p)
- (b) Beräkna $V[Z]$. (2 p)
- (c) Härled sannolikhetsfunktionen för Z . (7 p)

Uppgift 4

Robin har byggt en maskin som kastar pil. Baserat på erfarenhet anser Robin att det är rimligt att anta att sannolikheten att maskinen träffar tavlan vid varje givet kast är 40 %, och att kasten är oberoende. Robin planerar att låta maskinen kasta 15 pilar efter varandra.

(a) Vad är sannolikheten att maskinen träffar tavlan med varje pil? (2 p)

(b) Vad är sannolikheten att maskinen träffar tavlan med antingen exakt 12 eller exakt 13 pilar? (4 p)

(c) Robin har nu mixtrat med maskinen på ett sätt som gör att maskinen "förbättrar sig" på följande sätt: om man ber maskinen att kasta n kast, då är sannolikheten för tavelträff $p_i = i/(i+c)$, för kast nummer i , där $i = 1, \dots, n$ och c är en positiv konstant. Kasten anses oberoende.

Givet n kast, ange ett uttryck för sannolikheten att maskinen träffar tavlan med varje pil (ditt uttryck ska innehålla konstanterna n och c). (4 p)

Uppgift 5

(a) Låt $X \sim Re(0, 1)$. Härled fördelningsfunktionen för $Y = X^3$. (5 p)

(b) Låt $Z \sim Re(-1, 1)$. Härled fördelningsfunktionen för $W = Z^2$. (5 p)

Uppgift 6

Låt (X, Y) vara en tvådimensionell slumpvariabel där X och Y har följande väntevärden och standardavvikelser: $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y$.

Kovariansen mellan X och Y definieras av

$$C(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

och korrelationskoefficienten definieras av

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

(a) Bevisa att

$$C(X, Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y. \quad (4 \text{ p})$$

(b) Bevisa att

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1. \quad (6 \text{ p})$$