Lösningar för: Tentamen - Sannolikhetsteori I (MT3001)
9 januari 2017

Hänvisningarna nedan gäller till kursboken Alm & Britton.

Problem 1

Rätt svar: 2,2,2,3,2

Problem 2

Beteckna en apelsins vikt med X.

(a) Standardisering av normalfördelningen och tabell (s. 483) ger

$$P(X < 105) = P\left(\frac{X-100}{10} < \frac{105-100}{10}\right) = \Phi\left(\frac{105-100}{10}\right) = \Phi(0.5) = 0.6915.$$

(b) Ett sätt att beräkna uppgiften är att använda normalfördelningsapproximation (s. 165), vilket innebär att det gäller att $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(100\mu, 100\sigma^2)$ approximativt[1], vilket i detta fall innebär att $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(10000, 10000)$ approximativt. Ansätt $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, vilket betyder att Y är de 100 apelsinernas vikt. Vi får då (på samma sätt som i uppgiften ovan)

$$P(Y < 10500) = P\left(\frac{Y-10000}{100} < \frac{10500-10000}{100}\right) \approx \Phi\left(\frac{10500-10000}{100}\right)$$
$$= \Phi(5) = 1.$$

(c) Eftersom vi alltid har $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ (se sid. 64) följer att

$$E[X^2] = V(X) + (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2 = 100 + 100^2 = 10100.$$

Problem 3

(a) $E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \lambda_1 + \lambda_1 = 2\lambda_1$.

(b) Oberoendet ger $V[Z] = V[X+Y] = V[X] + V[Y] = \lambda_1 + \lambda_1 = 2\lambda_1$.

(c) Genom faltning finner vi att sannolikhetsfunktionen för Z är sådan att $Z \sim Po(2\lambda_1)$, se sid. 147.

Problem 4

(a) Låt X vara antalet träffar vid 15 kast. Då är $X \sim Bin(15, 0.4)$ och vi får $P(X = 15) = \binom{15}{15} * 0.4^{15} * (1-0.4)^{15-15} = 0.4^{15}$.

(b) På samma sätt som ovan får vi $P(X = 12) = \binom{15}{12} * 0.4^{12} * (1-0.4)^3 = 0.00165$ och $P(X = 13) = \binom{15}{13} * 0.4^{13} * (1-0.4)^2 = 0.00025$ och svaret blir därför:

[1] Eftersom varje X_i är normalfördelad gäller det faktiskt även exakt, se sid 152.

$P(X = 12 \text{ eller } X = 13) = P(X = 12) + P(X = 13) = 0.0019.$

(c) Sannolikheten att maskinen vid n kast träffar tavlan alla gånger blir pga oberoende $\prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+c}$.

Problem 5

(a) Eftersom $X \sim Re(0,1)$ har vi $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ x & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{om } x > 1. \end{cases}$

Detta ger att

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{\frac{1}{3}}) = F_X(y^{\frac{1}{3}}) = y^{\frac{1}{3}}, \quad 0 \le y \le 1$$

och generellt att $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y < 0 \\ y^{\frac{1}{3}} & \text{om } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{om } y > 1. \end{cases}$

(b) Eftersom $Z \sim Re(-1,1)$ har vi $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{om } z < -1 \\ \frac{z+1}{2} & \text{om } -1 \le z \le 1 \\ 1 & \text{om } z > 1. \end{cases}$

Detta ger att

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \le w) = P(Z^2 \le w) = P(-\sqrt{w} \le Z \le \sqrt{w}) \\ &= P(Z \le \sqrt{w}) - P(Z \le -\sqrt{w}) = F_Z(\sqrt{w}) - F_Z(-\sqrt{w}) \\ &= \frac{\sqrt{w}+1}{2} - \frac{-\sqrt{w}+1}{2} = \sqrt{w}, \quad 0 \le w \le 1, \end{aligned}$$

och generellt att (eftersom utfallen för $W = Z^2$ alltid hamnar i $[0,1]$)

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{om } w < 0 \\ \sqrt{w} & \text{om } 0 \le w \le 1 \\ 1 & \text{om } w > 1. \end{cases}$$

Problem 6

(a) Se sid. 123. **(b)** Se sid. 123.