STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
25 oktober 2017

Tentamen i Sannolikhetsteori I

25 oktober 2017 kl. 9–14

Examinator: Maria Deijfen, tel. 16 45 91, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Torsdag 2 november 2017 kl 14.00 utanför sal 14/15.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras och svar ska motiveras (om inte annat framgår). Eventuella approximationer ska motiveras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet.

a) En symmetrisk tärning kastas upprepade gånger. Låt A vara händelsen 'Det sjätte kastet blir en sexa', och B vara händelsen 'Första gången vi får en sexa är i sjätte kastet'. Vad är sant?

☐ $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$
☐ $\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$
☐ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$

b) Antag att händelserna E och F är oberoende och att $\mathrm{P}(E) > 0$ och $\mathrm{P}(F) > 0$. Påståendet 'E och F är disjunkta' är

☐ alltid falskt
☐ alltid sant
☐ möjligtivis sant

c) En aktionsgrupp är ute och samlar in namnunderskrifter för att protestera mot planerna på att bygga en stor galleria mitt på torget i Småköping. Tillfrågade personer skriver oberoende av varandra på listan med sannolikhet 0.7 och gruppen behöver 100 underskrifter för att stoppa bygget. Vilken fördelning har antalet personer som måste tillfrågas innan gruppen har fått ihop de nödvändiga underskrifterna?

□ Binomial
□ Geometrisk
□ Negativ binomial
□ Poisson

d) Modalvärdet för en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion $f(x)$ definieras som det x-värde där $f(x)$ antar sitt maximum (värden nära modalvärdet är alltså de mest sannolika värdena för X). Vad är modalvärdet om X är exponentialfördelad med parameter λ?

□ 0 oavsett värdet på λ
□ $\frac{1}{\lambda}$
□ λ

e) Låt X och Y vara stokastiska variabler med Var(X) =Var$(Y) = \sigma^2 > 0$ och $\text{Var}(X+Y) = 2\sigma^2$. Vad är sant?

□ Man kan inte avgöra om X och Y är oberoende och inte heller om $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
□ X och Y är oberoende, men man kan inte avöra om $\text{Cov}(X,Y) = 0$ eller inte.
□ $\text{Cov}(X,Y) \geq 5$
□ $\text{Cov}(X,Y) = 0$ och X och Y är oberoende.
□ $\text{Cov}(X,Y) = 0$ men man kan inte avöra om X och Y är oberoende.

Uppgift 2

Låt A, B och C vara oberoende händelser sådana att $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ och $P(C) = 0.1$.

a) Beräkna sannolikheten att minst en av händelserna inträffar.

b) Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna inträffar.

c) Beräkna den betingade sannolikheten $\text{P}(A|A \cup B)$.

Uppgift 3

En stokastisk variabel X har fördelningsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < -1; \\ 0.5(x+1) & \text{om } -1 \leq x \leq 1; \\ 1 & \text{om } x > 1. \end{cases}$$

a) Ange $\mathrm{P}(X > 0.5)$.

b) Ange täthetsfunktionen för X.

c) Beräkna väntevärde och varians för $|X|$.

Uppgift 4

Ett medicinskt test mäter mängden av ett specifikt antigen i blodet och används för att påvisa en viss form av allvarlig cancer. Testet är positivt (indikerar att patienten är drabbad) med sannolikheten 0.93 för patienter med cancertypen, och negativt med sannolikheten 0.97 för patienter utan cancertypen. Antag att 2% av en stor population äldre patienter har cancertypen.

a) Beräkna sannolikheten att testet är positivt för en slumpmässigt vald person i populationen.

b) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald person i populationen verkligen har cancertypen givet att testet är positivt.

c) Betrakta ett slumpmässigt urval om 100 personer ur populationen som fått ett positivt besked och kontaktats för vidare diagnos. Låt X vara antalet bland dessa 100 som inte har cancersjukdomen. Vilken fördelning och vilket väntevärde har X?

Uppgift 5

Den tid (i minuter) som behövs för att betjäna en kund som anländer till ett lager kan betraktas som en summa av tre oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde 2, 3 respektive 6. Betjäningstiderna för olika kunder kan antas vara oberoende.

a) Ange väntevärde och varians för betjäningstiden för en given kund.

b) Beräkna sannolikheten att den sammanlagda betjäningstiden för 100 kunder överstiger 1000 timmar [*Rättelse: 1000 minuter*].

c) Bestäm ett tal a sådant att den sammanlagda betjäningstiden för 100 kunder med sannolikhet 0.9 är högst a.

Uppgift 6

En viss typ av elektroniska komponenter har livslängder som kan antas vara oberoende av varandra och med samma fördelning. Fördelningen är dock bara delvis känd: Man vet att sannolikheten att en komponent fungerar i minst 60 minuter är 0.01. Hur många komponenter måste man starta med för att sannolikheten att minst en komponent fortfarande fungerar efter 60 minuter ska vara minst 0.9?

Lycka till!