STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
25 oktober 2017

Lösningar

25 oktober 2017

Uppgift 1

Rätt svar är

a) $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$

b) alltid falskt

c) Negativ binomial

d) 0 oavsett värdet på λ

e) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ men man kan inte avgöra om X och Y är oberoende

Uppgift 2

a) Vi söker sannolikheten för händelsen $A \cup B \cup C$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cup B \cup C) &= 1 - \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) \\
&\overset{ober}{=} 1 - \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C^c) \\
&= 1 - 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.622
\end{aligned}$$

b) Sannolikheten att exakt en av händelserna A och B inträffar ges av

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A \cap B^c \cap C^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B \cap C^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C) \\
\overset{ober}{=}\ & 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.1 \\
=\ & 0.456
\end{aligned}$$

b) Vi har att

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \overset{ober}{=} 0.4 + 0.3 - 0.4 \cdot 0.3 = 0.58$$

och den sökta sannolikheten blir då

$$\mathrm{P}(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A \cup B)} = \frac{0.4}{0.58} = 0.69$$

Uppgift 3

a) $\mathrm{P}(X > 0.5) - 1 - \mathrm{P}(X \leq 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.5(0.5 + 1) = 0.25$

b)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < -1; \\ 0.5 & \text{om } -1 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{om } x > 1. \end{cases}$$

c)

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{2} dx = 2 \int_{0}^{1} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[|X|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 f(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2} dx = \frac{1}{3}$$

Alltså: $\mathbb{E}[|X|] = 1/2$ och $\mathrm{Var}(|X|) = \mathbb{E}[|X|^2] - \mathbb{E}[|X|]^2 = 1/12$.

Uppgift 4

Låt A beteckna händelsen att en slumpmässigt vald person har cancertypen och B händelsen att testet är positivt.

a) Lagen om total sannolikhet ger

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\mathrm{P}(A^c) = 0.93 \cdot 0.02 + 0.03 \cdot 0.98 = 0.048.$$

b)

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0.93 \cdot 0.02}{0.048} = 0.3875$$

c) En rimlig modell är att $X \sim \mathrm{Bin}(100, 1 - 0.3875)$ och vi får då att $\mathbb{E}[X] = 100 \cdot 0.6125 = 61.25$

Uppgift 5

Låt X_i vara en stokastisk variabel som anger betjäningstiden (i minuter) för den i:te kunden. Då har vi, enligt uppgiften att $X_i = X_{i1} + X_{i2} + X_{i3}$, där X_{ij} $(j = 1, 2, 3)$ är oberoende och exponentialfördelade med $\mathbb{E}[X_{i1}] = 2$, $\mathbb{E}[X_{i2}] = 3$ och $\mathbb{E}[X_{i3}] = 6$ för alla i. Man har då att $\mathrm{Var}(X_{i1}) = 4$, $\mathrm{Var}(X_{i2}) = 9$ och $\mathrm{Var}(X_{i3}) = 36$.

a)

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_{i1} + X_{i2} + X_{i3}] = \mathbb{E}[X_{i1}] + \mathbb{E}[X_{i2}] + \mathbb{E}[X_{i3}] = 11$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X_{i1} + X_{i2} + X_{i3}) \overset{ober}{=} \mathrm{Var}(X_{i1}) + \mathrm{Var}(X_{i2}) + \mathrm{Var}(X_{i3}) = 49$$

b) [Rättelse: 1000 timmar → 1000 minuter.] Den sammanlagda betjäningtiden för 100 kunder ges av $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$, där $\mathbb{E}[S_{100}] = 100 \cdot \mathbb{E}[X_i] = 1100$ och $\mathrm{Var}(S_{100}) \overset{ober}{=} 100 \cdot \mathrm{Var}(X_i) = 4900$. Eftersom S_{100} är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler så är den approximativt N(1100,4900)-fördelad enligt Centrala gränsvärdessatsen, dvs

$$\mathrm{P}(S_{100} > 1000) = \mathrm{P}\left(\frac{S_{100} - 1100}{\sqrt{4900}} > \frac{1000 - 1100}{\sqrt{4900}}\right) \overset{CGS}{\approx} 1 - \Phi(-1.43) = \Phi(1.43) = 0.9236.$$

[Räknar man istället med 1000 timmar = 60000 minuter så fås $1 - \Phi(841) = 0.0000\ldots$ Korrekt lösning i detta fall ger också full poäng.]

c) Vi har att

$$\mathrm{P}(S_{100} \leq a) = \mathrm{P}\left(\frac{S_{100} - 1100}{\sqrt{4900}} \leq \frac{a - 1100}{\sqrt{4900}}\right) \overset{CGS}{\approx} \Phi\left(\frac{a - 1100}{70}\right).$$

Ska denna sannolikhet vara lika med 0.9 får vi ekvationen

$$\frac{a - 1100}{70} = \lambda_{0.1} = 1.2816,$$

dvs $a = 1189.7$.

Uppgift 6

Antag att vi startar med n komponenter och låt X beteckna antalet komponenter som fortfarande fungerar efter 60 minuter. Då har vi att $X \sim \mathrm{Bin}(n, 0.01)$ och alltså $\mathrm{P}(X > 0) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - (1 - 0.01)^n$. Vi söker alltså n sådant att $1 - 0.99^n \geq 0.9$, dvs $0.99^n \leq 0.1$. Logaritmering ger $n \ln(0.99) \leq \ln(0.1)$, dvs $n \geq \ln(0.1)/\ln(0.99) = 229.1$. Vi behöver alltså starta med minst 230 komponenter för att sannolikheten att minst en av dem fungerar efter 60 minuter ska vara minst 0.9.