STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
4 december 2017

Tentamen i Sannolikhetsteori I

4 december 2017 kl. 9–14

Examinator: Maria Deijfen, tel. 16 45 91, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Fredag 8 december kl 10.00-10.30 i rum 308 hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras och svar ska motiveras (om inte annat framgår). Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Låt P vara ett sannolikhetsmått och E och F två händelser. Sannolikheten att exakt en av händelserna E och F inträffar ges av

1. $\mathrm{P}(E \cup F) - \mathrm{P}(E^c) - \mathrm{P}(F^c)$
2. $\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - 2\mathrm{P}(E \cap F)$
3. $\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(E \cup F)$

b) Vad är utfallsrummet för den stokastiska variabel som anger skillnaden mellan antalet kronor och antalet klavar (dvs antalet kronor minus antalet klavar) då ett mynt kastas sex gånger?

1. $\{1, \dots, 6\}$
2. $\{2, \dots, 12\}$
3. $\{-5, \dots, 5\}$
4. $\{-6, \dots, 6\}$

c) I epidemimodellering antar man ofta att en smittad individ som anländer till en mottaglig population med n indivier smittar ner var och en av de mottagliga individerna oberoende med sannolikhet c/n, där c är en positiv konstant. Under detta antagande, vad har antalet individer som smittas av den initiala individen för fördelning i en rimlig och hanterbar sannolikhetsteoretisk modell om vi antar att n är mycket stort?

1. Poisson(c)
2. Binomial(n, c)
3. Geometrisk(c/n)
4. Negativ binomial

d) Låt X vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9, och Φ vara fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen $\mathrm{N}(0, 1)$. Då gäller

1. $\mathrm{P}(|X - 2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(0.5)$
2. $\mathrm{P}(|X - 2| \geq 4.5) = 2\Phi(0.5) - 1$
3. $\mathrm{P}(|X - 2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(1.5)$
4. $\mathrm{P}(|X - 2| \geq 4.5) = 2\Phi(1.5) - 1$

e) Låt X och Y vara stokastiska variabler med $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 23$. Vad är sant?

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq -23$
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 23$
3. $\mathrm{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{23}$
4. Man kan inte dra några slutsatser om $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Uppgift 2

Vid en tillverkningsprocess kontrolleras de tillverkade enheterna av en datorstyrd sensor och klassificeras då som antingen korrekta eller defekta. Sannolikheten att en defekt enhet klassificeras som defekt är 0.9 och sannolikheten att en korrekt enhet klassificeras som defekt är 0.15. Man vet också att 10% av de producerade enheterna är defekta.

a) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet klassificeras som defekt av sensorn?

b) Vad är sannolikheten att en enhet som klassificeras som defekt faktiskt är defekt?

Uppgift 3

Låt (X, Y) vara en diskret tvådimensionell stokastisk variabel som bara kan anta värdena (-1,0), (1,0) och (0,1). Antag att $p_{X,Y}(-1, 0) = p_{X,Y}(1, 0) = c$ och $p_{X,Y}(0, 1) = 2c$.

a) Bestäm konstanten c.

b) Ange de marginella sannolikhetsfunktionerna för X respektive Y.

c) Beräkna $\text{Cov}(X, Y)$.

d) Är X och Y oberoende?

Uppgift 4

Tre flickor och tre pojkar delas helt slumpmässigt in i två grupper med tre i varje grupp.

a) Vad är sannolikheten att det bara blir flickor i någon av grupperna och bara pojkar i den andra?

b) Vad är sannolikheten att det blir någon grupp med två flickor och en pojke (och den andra gruppen har två pojkar och en flicka)?

Uppgift 5

En betjäningsstation ska dimensioneras. Till betjäningsstationen inkommer kunder, och man antar att tiderna mellan ankomsterna är oberoende likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 10 minuter och standardavvikelse 6 (minuter). Tiden tills den första kunden anländer har också denna fördelning. För dimensioneringen är det väsentligt att veta hur många kunder som kan tänkas komma under en 8-timmarsperiod. Beräkna n så att sannolikheten att n kunder eller fler inkommer under en 8-timmarsperiod är högst 10%.

Uppgift 6

Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler med täthetsfunktioner

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/10 & \text{om } 0 \le x \le 10; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{om } y \ge 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Låt $U = \min\{X, Y\}$.

a) Bestäm täthetsfunktionen för U.

b) Beräkna $\mathrm{P}(5 < U \leq 6)$.

c) Beräkna $\mathbb{E}[U]$.

Lycka till!