STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
4 december 2017

Lösningar

4 december 2017

Uppgift 1

Rätt svar är

a) $\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - 2\mathrm{P}(E \cup F)$

b) $\{-6, \ldots, 6\}$

c) Poisson(c)

d) $\mathrm{P}(|X - 2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(1.5)$

e) $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq -23$

Uppgift 2

Låt D beteckna händelsen att en slumpmässig vald enhet är defekt och låt $\widehat{D}$ beteckna händelsen att enheten klassificeras som defekt av sensorn.

a) Lagen om total sannolikhet ger:

$$\mathrm{P}(\widehat{D}) = \mathrm{P}(\widehat{D}|D)\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(\widehat{D}|D^c)\mathrm{P}(D^c) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.9 = 0.225.$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(D|\widehat{D}) = \frac{\mathrm{P}(\widehat{D}|D)\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(\widehat{D})} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.225} = 0.4.$$

Uppgift 3

Se Exampel 3.39 i bokens avsnitt 3.8.3.

Uppgift 4

a) Om det bara är flickor i den ena gruppen så är det automatiska bara pojkar i den andra. Det finns $\binom{6}{3} = 20$ sätt att välja ut en grupp och bara ett sätt at välja ut en grupp så att alla medlemmar är flickor. För var och en av grupperna är sannolikheten att den innehåller bara flickor alltså $1/20$ och svaret blir då $2/20 = 1/10$ (eftersom vi kan välja på två sätt vilken grupp som ska bestå av endast flickor).

b) Händelsen att det blir två flickor och en pojke i någon grupp är komplementhändelse till händelsen att det blir bara flickor i någon grupp. Sannolikheten att någon grupp består av bara flickor bestämdes i (a) till $1/10$ och den sökta sannolikheten blir alltså $1 - 1/10 = 9/10$.

Uppgift 5

Låt X_i beteckna tiden (i minuter) mellan ankomst för kund $i-1$ och kund i. Tiden tills n kunder anlänt ges då av $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Eftersom $\{X_i\}$ är oberoende och likafördelade med $\mathbb{E}[X] = 10$ och $\mathrm{SD}(X) = 6$ så är S_n approximativt $N(10n, 6^2 n)$ om n är stort enligt Centrala gränsvärdessatsen. Att n kunder eller fler anländer under en 8-timmarsperiod är ekvivalent med att $S_n \leq 480$ (eftersom 8 timmar = 480 minuter). Vi söker alltså n så att $\mathrm{P}(S_n \leq 480) = 0.1$. Med hjälp av ovanstående approximation får vi att

$$0.1 = \mathrm{P}(S_n \leq 480) \approx \Phi\left(\frac{480 - 10n}{6\sqrt{6}}\right) \quad \text{dvs} \quad \frac{480 - 10n}{6\sqrt{n}} = -\lambda_{0.1} = -1.28.$$

Med $u = \sqrt{n}$ får vi ekvationen $10u^2 - 7.68u - 480 = 0$ som har lösningen $u = 0.384 \pm \sqrt{48 + 0.384^2}$. Vi är intresserade av den positiva lösningen och får $u = \sqrt{n} = 7.32$ och alltså $n = 53$.

Uppgift 6

a) Fördelningsfunktionen för U ges av

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= \mathrm{P}(U \le u) = 1 - \mathrm{P}(U > u) = 1 - \mathrm{P}(\min\{X, Y\} > u) = 1 - \mathrm{P}(X > u, Y > u) \\
&\overset{ober}{=} 1 - \mathrm{P}(X > u)\mathrm{P}(Y > u) = 1 - (1 - \mathrm{P}(X \le u))(1 - \mathrm{P}(Y \le u)) \\
&= 1 - (1 - F_X(u))(1 - F_Y(u)).
\end{aligned}$$

Fördelningsfunktionerna F_X och F_Y för X och Y fås genom att integrera motsvarande täthet: $F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)du$. Vi får

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & \text{om } u < 0; \\ \frac{u}{10} & \text{om } 0 \le u < 10; \\ 1 & \text{om } u \ge 10; \end{cases}$$

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0 & \text{om } u < 0; \\ 1 - e^{-u} & \text{om } u \ge 0; \end{cases}$$

vilket ger

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{om } u < 0; \\ 1 - \left(1 - \frac{u}{10}\right) e^{-u} & \text{om } 0 \le u < 10; \\ 1 & \text{om } u \ge 10. \end{cases}$$

Täthetsfunktionen för U ges av derivatan av fördelningsfunktionen:

$$f_U(u) = F_U'(u) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-u} + (1 - \frac{u}{10})e^{-u} = \frac{11-u}{10}e^{-u} & \text{om } 0 \le u < 10; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

b) Den sökta sannolikheten ges av

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(5 < U \le 6) &= F_U(6) - F_U(5) = 1 - \left(1 - \frac{6}{10}e^{-6}\right) - \left[1 - \left(1 - \frac{5}{10}\right) e^{-5}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{-5} - \frac{2}{5}e^{-6} = 0.0044.
\end{aligned}$$

c) Väntevärdet är

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U] &= \int_{-\infty}^{\infty} u f_U(u) du = \int_0^{10} u \cdot \frac{11 - u}{10} e^{-u} du \\
&= \{\text{partialintegration}\} \\
&= \frac{1}{10}(9 - e^{-10}) = 0.90.
\end{aligned}$$