STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
17 augusti 2018

# Tentamen i Sannolikhetsteori I

## 17 augusti 2018 kl. 9–14

*Examinator:* Maria Deijfen, tel. 16 45 91, mia@math.su.se
*Tillåtna hjälpmedel:* Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
*Återlämning:* Fredag 31 augusti kl 10.00-10.30 i rum 321 hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras och svar ska motiveras (om inte annat framgår). Följande gränser gäller för betygen A-E:

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 45 | 40 | 35 | 30 |

### Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

**a)** Ett mynt kastas två gånger. Låt $A$ ='det blir krona i första kastet', $B$ ='det blir krona i andra kastet', $C$ ='det blir samma utfall i båda kasten'. Vad gäller?

1. De tre händelserna är oberoende.
2. De tre händelserna är inte parvis oberoende.
3. De tre händelserna är parvis oberoende men det gäller inte att $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

**b)** På ett bord står två urnor. Den ena urnan innehåller två kulor, en röd och en blå, och den andra urnan innehåller fyra kulor, två röda och två blå. Låt $X$ vara antalet röda kulor i en slumpvis vald urna och låt $Y$ var antalet röda kulor som ligger i samma urna som en slumpvis vald kula. Vad gäller?

1. $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$
3. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$

**c)** En försöksgrupp i ett läkemedelstest består av 50 personer varav 20 är rökare. Ur gruppen väljs slumpmässigt 25 personer ut för att testa ett nytt preparat mot högt blodtryck. Låt $X$ beteckna antalet rökare i den utvalda gruppen. Vad gäller?

1. $X$ är binomialfördelad med väntevärde 15.
2. $X$ är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 10.
3. $X$ är binomialfördelad med väntevärde 10.
4. $X$ är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 15.

**d)** Låt $X$ vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9. Vilket värde på $d$ gör att $\mathrm{P}(X \geq d) = 0.01$?

1. $d = 9.7274$
2. $d = 8.9789$
3. $d = 2.3263$
4. $d = 2.5758$

**e)** Låt $X$ och $Y$ vara stokastiska variabler med $\mathbb{E}[X] = \mu_x$ och $\mathbb{E}[Y] = \mu_y$. Vad är sant?

1. Det gäller alltid att $\mathbb{E}[X + Y] = \mu_x + \mu_y$.
2. $\mathbb{E}[X + Y] = \mu_x + \mu_y$ bara om $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$.
3. $\mathbb{E}[X + Y] = \mu_x + \mu_y$ bara om $X$ och $Y$ är oberoende.

## Uppgift 2

Ett företag som tillverkar elektroniska komponenter har tillverkningen förlagd till tre olika fabriker där $A$ står för 50% av tillverkningen, $B$ för 30% och $C$ för 20%. Man vet att en komponent från fabrik $A$ blir defekt med sannolikhet 0.05. Motsvarande siffra för $B$ är 0.1 och för $C$ är den 0.08.

**a)** Alla tillverkade komponenter samlas i ett centralt lager. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald komponent i lagret är defekt?

**b)** En slumpmässigt vald komponent i lagret visar sig vara defekt. Vad är sannolikheten att komponenten har tillverkats i fabrik $B$?

## Uppgift 3

Låt $(X, Y)$ vara en tvådimensionell stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} cye^{-(x+y)} & \text{om } x, y \geq 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

**a)** Bestäm konstanten $c$.

**b)** Bestäm de marginella täthetsfunktionerna för $X$ respektive $Y$.

**c)** Är $X$ och $Y$ oberoende?

## Uppgift 4

En ideell förening planerar en insamling bland sina medlemmar. Föreningen skickar ett brev till var och en av de 1000 medlemmarna där man ber om ett bidrag på 50 eller 100 kronor. Man vet från tidigare att 50 och 100 kronors bidrag är i genomsnitt lika vanliga och att i genomsnitt 20% av medlemmarna inte ger något bidrag. Bestäm med hjälp av en lämplig och välmotiverad approximation sannolikheten att föreningens sammanlagda insamling överstiger 58 000 kronor.

## Uppgift 5

Låt $Y$ vara maximum av åtta oberoende kontinuerliga stokastiska variabler som är likformigt fördelade på intervallet $[0, 15]$.

**a)** Bestäm fördelningsfunktionen och täthetsfunktionen för $Y$.

**b)** Bestäm $\mathbb{E}[Y]$.

## Uppgift 6

I en urna finns tre röda och nio gröna kulor. Man drar slumpmässigt och utan återläggning de tolv kulorna en efter en ur urnan. Bestäm sannolikheterna för följande händelser:

**a)** Den sista dragna kulan är röd.

**b)** De två först dragna kulorna har olika färg.

**c)** De tre röda kulorna blir dragna i en följd (utan gröna kulor däremellan).

*Lycka till!*