STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
17 augusti 2018

Lösningar

17 augusti 2018

Uppgift 1

Rätt svar är

a) De tre händelserna är parvis oberoende men det gäller inte att $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

b) $\mathbb{E}[Y] > \mathbb{E}[X]$

c) X är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 10

d) $d = 8.9789$

e) Det gäller alltid att $\mathbb{E}[X + Y] = \mu_x + \mu_y$.

Uppgift 2

Låt D beteckna händelsen att en slumpmässig vald enhet är defekt och låt F_A, F_B och F_C beteckna händelserna att enheten är tillverkad i fabrik A, B respektive C.

a) Lagen om total sannolikhet ger:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|F_A)P(F_A) + P(D|F_B)P(F_B) + P(D|F_C)P(F_C) \\ &= 0.05 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.08 \cdot 0.2 = 0.071. \end{aligned}$$

b) Bayes sats ger:

$$P(F_B|D) = \frac{P(D|F_B)P(D)}{P(D)} = \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.071} = 0.422.$$

Uppgift 3

a) Det ska gälla att $I := \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$. Vi får:

$$I = c\int_0^\infty \left(\int_0^\infty ye^{-(x+y)}dx\right)dy = c\int_0^\infty ye^{-y}dy = \{\text{partialintegration}\} = c,$$

och alltså $c = 1$.

b)

$$f_X(x) = \int_0^\infty ye^{-(x+y)}dy = e^{-x} \text{ för } x \geq 0, \text{ och } f_X(x) = 0 \text{ för } x < 0.$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty ye^{-(x+y)}dx = ye^{-y} \text{ för } y \geq 0, \text{ och } f_Y(y) = 0 \text{ för } y < 0.$$

c) Vi har att $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$ och alltså är X och Y oberoende.

Uppgift 4

Låt X_i beteckna bidraget från medlem nr i ($i = 1, \ldots, 1000$) och sätt $Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Vi söker $\mathrm{P}(Y \geq 58000)$. En variabel X_i antar värdena 0, 50 och 100 (kronor) med sannolikheter $p_0 = 0.2$, $p_{50} = 0.4$ och $p_{100} = 0.4$. Vi får att $\mathbb{E}[X_i] = 60$ och $\mathbb{E}[X_i^2] = 5000$, så att $\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = 1400$. För Y får vi att $\mathbb{E}[Y] = \sum \mathbb{E}[X_i] = 1000 \cdot 60$ och att $\mathrm{Var}(X_i) \overset{ober}{=} \sum \mathrm{Var}(X_i) = 1000 \cdot 1400$. Eftersom $\{X_i\}$ är oberoende och likafördelade och Y en summa av ett stort antal sådana variabler så är Y approximativt $N(\mathbb{E}[Y], \mathrm{Var}(Y))$ enligt Centrala gränsvärdessatsen. Alltså:

$$\mathrm{P}(Y \geq 58000) \overset{CGS}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{58000 - \mathbb{E}[Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right) = 1 - \Phi(-1.69) = \Phi(1.69) = 0.95.$$

Uppgift 5

Låt X_i ($i = 1, \ldots, 8$) vara likformigt fördelade på $[0, 15]$. Då ges fördelningsfunktionen för X_i av

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0; \\ \frac{x}{15} & \text{om } x \in [0, 15]; \\ 1 & \text{om } x \geq 15. \end{cases}$$

a) Fördelningsfunktionen för $Y = \max_{1\leq i\leq 8}\{X_i\}$ ges av

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(\cap_{i=1}^{8}\{X_i \leq y\}) \stackrel{iid}{=} \mathrm{P}(X_1 \leq y)^8$$

och vi får alltså

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y < 0; \\ \left(\frac{y}{15}\right)^8 & \text{om } y \in [0, 15]; \\ 1 & \text{om } y \geq 15. \end{cases}$$

Täthetsfunktionen $f_Y(y)$ fås genom att derivera fördelningsfunktionen, vilket ger

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{8y^7}{15^8}\right)^7 & \text{om } y \in [0, 15]; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

b) $\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{15} 8(y/15)^8 dy = 13.3.$

Uppgift 6

Vi har en situation som innebär dragning utan återläggning men med hänsyn tagen till ordning.

a) Det finns tre röda kulor och har en av dem dragits först så finns 11! olika sätt att ordna resterande kulor. Eftersom det totalt finns 12! olika sätt att ordna kulorna, och alla ordningar har samma sannolikhet, så blir den sökta sannolikheten $3 \cdot 11!/12! = 1/4$.

b) Det finns $3 \cdot 9 \cdot 2$ olika sätt att först välja två kulor med olika färg (en röd och en grön ska väljas och dessa kan sen ordnas på två sätt). Därefter kan resterande kulor ordnas på på 10! olika sätt. Den sökta sannolikheten blir alltså $3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 10!/12! \approx 0.41$.

c) De röda kulorna kan ordnas på 3! olika sätt. Vi tänker oss nu att vi klistrar ihop de röda kulorna till ett block i dragningen. Det röda blocket kan placeras på 10 olika platser, och de gröna kulorna kan ordnas på 9! olika sätt på övriga platser. Det finns alltså totalt $10 \cdot 3! \cdot 9!$ olika ordningar där de röda kulorna dras efter varandra utan gröna emellan, och den sökta sannolikheten blir $10 \cdot 3! \cdot 9!/12! \approx 0.045$.