STOCKHOLMS UNIVERSITET MATEMATISKA INSTITUTIONEN Avd. Matematisk statistik

MT 3001 TENTAMEN 2 november 2018

Tentamen i Sannolikhetsteori I

2 november 2018 kl. 9–14

Examinator: Maria Deijfen, tel. 16 45 91, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tisdag 13 november kl 12.15 i sal 36.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Antag att händelserna E och F är disjunkta och att $\mathrm{P}(E) > 0$ och $\mathrm{P}(F) > 0$. Påståendet 'E och F är oberoende' är

1. möjligtvis sant
2. alltid falskt
3. alltid sant

b) Låt X vara en stokastisk variabel med fördelningsfunktion $F_X(x) = 1 - \exp\{-\int_0^x g(u)du\}$ för någon funkion $g(u)$. Vad måste gälla för att $F_X(x)$ ska vara en fördelningsfunktion?

1. $g(u) \leq 0$ för alla u och $\int_0^\infty g(u) < \infty$
2. $g(u) \geq 0$ för alla u och $\int_0^\infty g(u) < \infty$
3. $g(u) \geq 0$ för alla u och $\int_0^\infty g(u) = \infty$
4. $g(u) \leq 0$ för alla u och $\int_0^\infty g(u) = \infty$

c) Låt X vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9, och låt Φ vara fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen N(0,1). Då gäller

1. $\mathrm{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(0.5)$
2. $\mathrm{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(1.5)$
3. $\mathrm{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2\Phi(0.5) - 1$
4. $\mathrm{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2\Phi(1.5) - 1$

d) Låt X och Y vara stokastiska variabler och låt $\rho(X,Y)$ vara deras korrelationskoefficient. Vad är alltid sant?

1. $|\rho(X,Y)| \leq \mathrm{Cov}(X,Y)$
2. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
3. $\rho(X,Y) \leq \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$

e) Låt X vara en slumpvariabel med väntevärde μ och varians σ^2. Då gäller enligt felfortplantningsformlerna att:

1. $\mathrm{Var}(e^X) \approx e^{2\sigma}\mu^2$
2. $\mathrm{Var}(e^X) \approx \sigma^2$
3. $\mathrm{Var}(e^X) \approx e^{\sigma^2}$
4. $\mathrm{Var}(e^X) \approx e^{2\mu}\sigma^2$

Uppgift 2

Ett företags godstransporter sker antingen med lastbil, tåg eller flyg. Av transporterna sker 50% med lastbil, 30% med tåg och 20% med flyg. Andelen transportskadat gods är 10% med lastbil, 6% med tåg och 4% med flyg.

a) Vad är sannolikheten att en given transport resulterar i transportskadat gods?

b) Om man tar emot ett transportskadat gods, hur stor är sannolikheten att det har skickats med tåg?

Uppgift 3

Du har en rektangulär låda med sidorna X cm, Y cm och Z cm, där X, Y, Z är oberoende stokastiska variabler med $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] = 1$ cm, $\mathrm{Var}(X) = 0.5$ och $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(Z) = 0.75$.

a) Beräkna väntevärdet för lådans volym.

b) Beräkna variansen för lådans volym.

Uppgift 4

En person som smittas med Ebola-viruset kommer att avlida till följd av sjukdomen med sannolikhet 0.9, och vi antar att olika personer avlider oberoende av varandra. På ett sjukhus i sydvästra Guinea (där en Ebola-epidemi startar i februari 2014) har organisationen Läkare Utan Gränser satt upp en smittskyddsavdelning där man tar emot Ebola-smittade patienter.

a) Första veckan tar avdelningen emot 7 patienter. Vad är sannolikheten att (exakt) tre av dem avlider till följd av sjukdomen?

b) Andra veckan tar man emot 12 patienter. Vad är sannolikheten att (exakt) tio patienter som anländer de första två veckorna avlider till följd av sjukdomen?

c) Det sker en dramatisk ökning av antalet patienter de två näst-kommande veckorna. Den tredje veckan tar man emot 254 patienter och den fjärde veckan tar man emot 762 patienter. Man har resurser för att klara av 850 dödsfall bland de patienter som anländer de första fyra veckorna. Vad är sannolikheten att Läkare Utan Gränser måste begära mer pengar för att klara driften?

Uppgift 5

Antag att $c \in [0, 1]$ är en konstant och antag att den kontinuerliga 2-dimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har simultan täthet

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{c}{x^2y^2} + (1-c)e^{-x-y+2} & \text{om } x \geq 1 \text{ och } y \geq 1; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Verifiera att $f(x, y)$ är en täthet för alla $c \in [0, 1]$.

b) Beräkna de marginella tätheterna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.

c) Identifiera alla värden på c som gör att X och Y blir oberoende.

Uppgift 6

Man vill dela upp en klass med 30 elever i tre grupper så att alla grupper har precis 10 medlemmar. Man bryr sig inte om vilka som är med i samma grupp, inte i vilken ordning de väljs eller gruppens 'nummer' (1,2 eller 3).

a) Hur många sätt kan indelningen göras på?

b) Om man helt slumpmässigt väljer en av de möjliga indelningarna, vad är då sannolikheten att två utvalda personer (Lisa och Kalle) hamnar i samma grupp?

c) Om man helt slumpmässigt väljer en av de möjliga indelningarna, vad är då sannolikheten att tre utvalda personer (Anna, Elin och Lars) hamnar i tre olika grupper?

Lycka till!