STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
2 november 2018

Lösningar

2 november 2018

Uppgift 1

Rätt svar är

a) alltid falskt

b) $g(u) \geq 0$ för alla u och $\int_0^\infty g(u) = \infty$

c) $\mathrm{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(1.5)$

d) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

e) $\mathrm{Var}(X) \approx e^{2\mu}\sigma^2$

Uppgift 2

Låt S beteckna händelsen att en transport resulterar i transportskadat gods och låt L, T och F beteckna händelserna att transporten sker med lastbil, tåg respektive flyg.

a) Lagen om total sannolikhet ger:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= \mathrm{P}(S|L)\mathrm{P}(L) + \mathrm{P}(S|T)\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(S|F)\mathrm{P}(F) \\ &= 0.1 \cdot 0.5 + 0.06 \cdot 0.3 + 0.04 \cdot 0.2 = 0.076.\end{aligned}$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(T|S) = \frac{\mathrm{P}(S|T)\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{0.06 \cdot 0.3}{0.076} = 0.237.$$

Uppgift 3

Lådans volym ges av XYZ.

a) $\mathbb{E}[XYZ] \overset{ober}{=} \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z] = 1 \text{ cm}^3$

b) Vi har $\mathrm{Var}(XYZ) = \mathbb{E}[(XYZ)^2] - \mathbb{E}[XYZ]^2 \overset{ober}{=} \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Z^2] - 1$. Här är $\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2 = 0.5 + 1 = 1.5$ och p.s.s. $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2] = 1.75$. Alltså blir $\mathrm{Var}(XYZ) = 1.5 \cdot 1.75 \cdot 1.75 - 1 = 3.59 \text{ cm}^6$.

Uppgift 4

a) Låt X beteckna antalet som avlider den första veckan. Då gäller att $X \sim \mathrm{Bin}(7, 0.9)$, dvs $\mathrm{P}(X = 3) = \binom{7}{3}0.9^3 0.1^4 = 0.0026$.

b) Låt Y beteckna antalet som avlider de två första veckorna. Då gäller att $Y \sim \mathrm{Bin}(19, 0.9)$, dvs $\mathrm{P}(Y = 10) = \binom{19}{10}0.9^{10}0.1^9 = 3.22 \cdot 10^{-5}$.

c) Antalet patienter som tas emot de fyra första veckorna är $7 + 12 + 254 + 762 = 1035$. Låt S beteckna det totala antalet dödsfall de första fyra veckorna. Då gäller att $S \sim \mathrm{Bin}(1035, 0.9) \approx N(931.5, 93.15)$, där approximationen följer från Centrala gränsvärdessatsen eftersom en binomialfördelning med stort n kan betraktas som en summa av ett stort antal oberoende Bernoullivariabler. Den sökta sannolikheten blir:

$$\mathrm{P}(S > 850) \overset{CGS}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{850 - 931.5}{\sqrt{93.15}}\right) = 1 - \Phi(-8.44) \approx 1.$$

Uppgift 5

a) En täthet måste vara positiv och integrera sig till 1. Vi har:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\left(\frac{c}{x^2y^2} + (1-c)e^{-x-y+2}\right)dxdy \\
&= \int_1^{\infty}\left[-\frac{c}{xy^2} - (1-c)e^{-x-y+2}\right]_{x=1}^{\infty} dy \\
&= \int_1^{\infty}\left(\frac{c}{y^2} + (1-c)e^{-y-1}\right)dy \\
&= \left[-\frac{c}{y} - (1-c)e^{-y-1}\right]_1^{\infty} = c + (1-c) = 1
\end{aligned}$$

Alltså integrerar sig $f(x,y)$ till 1 för alla c. Vi ser också att $f(x,y) \geq 0$ för $c \in [0,1]$ och alltså är $f(x,y)$ en täthet för $c \in [0,1]$.

b) För $x \geq 1$ har vi att

$$f_X(x) = \int_1^\infty f(x,y)dy = \left[-\frac{c}{x^2 y} - (1-c)e^{-x-y+2}\right]_{y=1}^\infty = \frac{c}{x^2} + (1-c)e^{-x+1}$$

och $f_X(x) = 0$ för $x < 1$. Av symmetriskäl fås att $f_Y(y) = \frac{c}{y^2} + (1-c)e^{-y+1}$ för $y \geq 1$ och $f_Y(y) = 0$ annars.

c) Det gäller att X och Y är oberoende omm $f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$ för alla x, y. Vi har att

$$f_X(x)f_Y(Y) = \frac{c^2}{x^2y^2} + \frac{c(1-1)}{y^2}e^{-x+1} + \frac{c(1-c)}{x^2}e^{-y+1} + (1-c)^2 e^{-y-x+2},$$

och ser alltså att X och Y är oberoende omm $c = 0$ eller $c = 1$.

Uppgift 6

a) Låt oss först anta att grupperna är ordnade. Det finns $\binom{30}{10}$ sätt att välja ut eleverna i den första gruppen och när dessa är valda finns $\binom{20}{10}$ sätt att välja eleverna i den andra gruppen. Resten av eleverna placeras i den tredje gruppen. Nu bryr vi oss inte om ordningen, och för en given indelning av eleverna finns 3! sätt att ordna grupperna. Utan hänsyn till ordning får vi alltså $\binom{30}{10}\binom{20}{10}/3!$ stycken indelningar.

b) Vi placerar nu Lisa och Kalle i samma grupp. Denna grupp kommer att särskilja sig från de övriga i och med att Lisa och Kalle båda ingår där. Det finns $\binom{28}{8}$ sätt att välja resterande elever i denna grupp. Därefter finns $\binom{20}{10}$ sätt att välja ut eleverna till nästa grupp och resterande elever placeras sen i den sista gruppen. Gör vi inte skillnad på ordning mellan de två sista grupperna finns alltså $\binom{28}{8}\binom{20}{10}/2!$ indelningar där Lisa och Kalle är i samma grupp, och den sökta sannolikheten blir

$$\frac{\binom{28}{8}\binom{20}{10}/2!}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}/3!} = \frac{3! \cdot 9 \cdot 10}{2! \cdot 29 \cdot 30} = \frac{9}{29} = 0.310.$$

Detta kan också inses genom att notera att, när Lisa placerats i en grupp, så är sannolikheten att Kalle placeras i samma grupp 9/29 (eftersom det finns 9 platser kvar i denna grupp av totalt 29 platser).

c) Vi placerar Anna, Elin och Lars i olika grupper. Det finns $\binom{27}{9}$ sätt att välja resterade elever i Annas grupp och därefter $\binom{18}{9}$ sätt att välja resterade elever i Elins grupp. Kvarvarande elever placeras i Lars grupp. Den sökta sannolikheten blir alltså

$$\frac{\binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}/3!} = \frac{3! \cdot 10^3}{28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{20 \cdot 10}{29 \cdot 28} = 0.246.$$

Detta kan också inses genom att notera att, när Anna placerats i en grupp, så är sannolikheten att Elin placeras i en annan grupp 20/29 och, när även Elin har placerats, så är sannolikheten att Lars placeras i den tredje gruppen 10/28.