STOCKHOLMS UNIVERSITET	MT 3001
MATEMATISKA INSTITUTIONEN	TENTAMEN
Avd. Matematisk statistik	12 december 2018

Tentamen i Sannolikhetsteori I

12 december 2018 kl. 9–14

Examinator: Maria Deijfen, tel. 16 45 91, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Torsdag 20 december kl 10.00 i rum 321, hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Det gäller alltid att $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F \cap E^c)$. Vilket av sannolikhetsaxiomen behöver man för att visa det?

1. $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$ om $A_1, A_2, \ldots$ är parvis disjunkta
2. $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ för alla $A \subset S$
3. $\mathrm{P}(S) = 1$

b) Vilken av dessa funktioner är en täthetsfunktion?

1. $f(x) = x$ om $x \in [0, \sqrt{2}]$, och $f(x) = 0$ annars.
2. $f(x) = x$ om $x \geq 0$, och $f(x) = 0$ annars.
3. $f(x) = x$ om $x \in [0, 1]$, och $f(x) = 0$ annars.
4. $f(x) = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

c) Låt X vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9 och låt Φ vara fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen. Då gäller:

1. $P(X \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5)$
2. $P(X \leq 0.5) = 2\Phi(0.5) - 1$
3. $P(X \leq 0.5) = 2 - 2\Phi(0.5)$
4. $P(X \leq 0.5) = \Phi(0.5)$

d) Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y) = x + y$ för $x \in [0, 1]$ och $y \in [0, 1]$. Vad gäller?

1. $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathbb{E}[Y] > \mathbb{E}[Y]$
3. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$

e) Låt X och Y vara två stokastiska variabler med $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mu$. Låt $\mathrm{Cov}(X, Y)$ beteckna kovariansen mellan X och Y. Vad är sant?

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq \mu^2$
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mu^2$
3. $\mathrm{Cov}(X, Y) \leq \mu^2$
4. Man kan inte dra några slutsatser om $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Uppgift 2

De flesta rättssystem bygger på principen "hellre fria än fälla". Ändå är det oundvikligt att oskyldiga ibland döms. Anta att det bland de åtalade är 70% som verkligen är skyldiga och att sannolikheten att en skyldig döms är 60% medan sannolikheten att en oskyldig döms är så liten som 0.3%.

a) Vad är sannolikheten att en åtalad person döms?

b) Vad är sannolikheten att en dömd person är oskyldig?

Uppgift 3

Ett nytt bostadområde med 3000 hushåll planeras i en kommun. Sannolikheten att ett hushåll har noll, ett, två eller tre barn i skolåldern kan antas vara 0.20, 0,45, 0.25 respektive 0.10. Antalet barn i olika hushåll antas vara oberoende.

a) Bestäm väntevärde och varians för antalet barn per hushåll.

b) Hur många skolplatser ska planeras om sannolikheten att alla barn ska få plats ska vara minst 95%?

Uppgift 4

Nina och Nils ställer sig i kö med åtta andra personer helt slumpmässigt.

a) Vad är sannolikheten att de står bredvid varandra?

b) Vad är sannolikheten att det finns högst två personer mellan dem?

Uppgift 5

Antag att arean av en cirkel ges av en exponentialfördelad stokastisk variabel X med parameter θ.

a) Låt Y beteckna cirkelns radie, dvs $X = \pi Y^2$. Härled täthetsfunktionen för Y.

b) Betrakta n stycken cirklar vars areor är oberoende och exponentialfördelade med parameter θ. Härled täthetsfunktionen för den minsta arean.

Uppgift 6

Den sannolikhetsgenererande funktionen för en heltalsvärd icke-negativ stokastisk variabel X definieras som $g_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$, där $t \in \mathbb{R}$.

a) Visa att

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!},$$

där $g_X^{(n)}(t)$ betecknar den n:te derivatan av $g_X(t)$.

b) Bestäm den sannolikhetsgenererande funktionen för en Poissonfördelad variabel med väntevärde λ.

Lycka till!