STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
12 december 2018

Lösningar

12 december 2018

Uppgift 1

Rätt svar är

a) $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$ om $A_1, A_2, \ldots$ är parvis disjunkta

b) $f(x) = x$ om $x \in [0, \sqrt{2}]$, och $f(x) = 0$ annars.

c) $\mathrm{P}(X \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5)$

d) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$

e) Man kan inte dra några slutsatser om $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Uppgift 2

Låt D beteckna händelsen att en åtalad person döms och låt S och O beteckna händelserna att den åtalde är skyldig respektive oskyldig.

a) Lagen om total sannolikhet ger:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(D|S)\mathrm{P}(S) + \mathrm{P}(D|O)\mathrm{P}(O) \\ &= 0.6 \cdot 0.7 + 0.003 \cdot 0.3 = 0.4209. \end{aligned}$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(O|D) = \frac{\mathrm{P}(D|O)\mathrm{P}(O)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0.003 \cdot 0.3}{0.421} = 0.0021.$$

Uppgift 3

Låt X_i beteckna antalet barn i hushåll i ($i = 1, \ldots, 3000$). Då är $\{X_i\}$ oberoende och lika fördelade.

a) $\mathbb{E}[X_i] = \sum_{k=0}^{3} k\mathrm{P}(X_i = k) = 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.1 = 1.25$
$\mathbb{E}[X_i^2] = \sum_{i=0}^{3} k^2\mathrm{P}(X_i = k) = 1^2 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.1 = 2.35$
$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = 0.788$

b) Det totala antalet skolplatser som krävs är $S = \sum_{i=1}^{3000} X_i$. Vi ska bestämma n så att $\mathrm{P}(S \leq n) = 0.95$. Eftesom S är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler så säger Centala gränsvärdessatsen att dess fördelning approximeras väl av en normalfördelning. Vi får:

$$\mathrm{P}(S \leq n) = \mathrm{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var(S)}}} \leq \frac{n - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var(S)}}}\right) \approx \Phi\left(\frac{n - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var(S)}}}\right),$$

där $\Phi(x)$ betecknar fördelningsfunktionen för $N(0,1)$-fördelningen. Här är $\mathbb{E}[S] = 3000 \cdot \mathbb{E}[X] = 3750$ och eftersom $\{X_i\}$ är oberoende så fås att $\mathrm{Var}(S) = 3000 \cdot \mathrm{Var(X)} = 2362.5$ och $\sqrt{\mathrm{Var(S)}} = 48.6$. Vill vi att $\Phi(x) = 0.95$ så ska x väljas som 5%-kvantilen i $N(0,1)$-fördelningen, dvs $x = 1.6449$. Vi får att $(n - 3750)/48.6 = 1.6449$, vilket ger $n = 3829.95$. Alltså ska minst 3830 skolplatser planeras.

Uppgift 4

a) Det finns 10! olika sätt att ordna 10 personer. Tar vi bort Nina och Nils finns 8! sätt att ordna de övriga 8 personerna. Ska Nina och Nils står bredvid varandra finns 9 platser vi kan placera in dem på givet att övriga redan har ordnats i kön. När vi har valt var vi ska placera in dem kan vi dessutom ordna dem sinsemellan på 2 olika sätt. Sammantaget finns alltså $9 \cdot 2 \cdot 8!$ olika sätt att arrangera kön så att Nina och Nils står bredvid varandra. Den sökta sannolikheten blir alltså $10!/(9 \cdot 2 \cdot 8!) = 1/5 = 0.2$.

b) Om övriga personer har ordnats, finns det 8 olika sätt att placera in Nina och Nils så att de har precis en person mellan sig och 7 olika sätt att placera in dem så att de har precis två personer mellan sig. Enligt (a) finns 9 sätt att placera in dem bredvid varandra. För varje val av placering för Nina och Nils kan de ordnar inbördes på 2 olika sätt, och det söka sannolikheten blir alltså $2(7 + 8 + 9)8!/10! = 8/15 = 0.53$.

Uppgift 5

a) Vi har att $Y = \sqrt{X/\pi}$ och får för fördelningsfunktionen att

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(\sqrt{X/\pi} \le y) = \mathrm{P}(X \le \pi y^2) = F_X(\pi y^2),$$

för $y \ge 0$ och $F_Y(y) = 0$ för $y < 0$. Täthetsfunktionen för Y ges alltså för $y \ge 0$ av

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(\pi y^2) = 2\pi y f_X(\pi y^2) = 2\pi\theta y e^{-\pi\theta y^2}$$

och $f_Y(y) = 0$ för $y < 0$.

b) Låt Y_i beteckna arean hos cirkel i och M arean hos den minsta av de n cirklarna. Fördelningsfunktionen för M ges för $t \ge 0$ av

$$F_M(t) = \mathrm{P}(M \le t) = 1-\mathrm{P}(M > t) = 1-\mathrm{P}(\text{alla } X_i > t) \overset{ober}{=} 1-\mathrm{P}(X_1 > t)^n = 1-(1-F_X(t))^n,$$

och $F_M(t) = 0$ för $t < 0$. Fördelningsfunktionen för X ges för $t \ge 0$ av $F_X(t) = \int_0^t \theta e^{-\theta s} ds = 1 - e^{\theta t}$ och vi får alltså att $F_M(t) = 1 - e^{-n\theta t}$. Täthetsfunktionen för M fås genom att derivera fördelningsfunktionen:

$$f_M(t) = \begin{cases} n\theta e^{-n\theta t} & \text{för } t \ge 0; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

dvs M är exponentialfördelad med parameter $n\theta$.

Uppgift 6

a) Vi har att $g_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathrm{P}(X = k)$ och termvis derivering ger att n :te derivatan blir

$$g_X^{(n)}(t) = \sum_{k=n} k(k-1)\cdots(k-n+1)t^{k-n}\mathrm{P}(X = k).$$

För $t = 0$ bidrar bara den första termen ($k = n$) och vi får $g_X^{(n)}(0) = n!\mathrm{P}(X = n)$. Det sökta sambandet följer av detta.

b) Om $X \sim$Po(λ) så gäller att $\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ för $k = 0, 1, \ldots$. Vi får:

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$