STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
19 augusti 2019

Tentamen i Sannolikhetsteori I

19 augusti 2019 kl. 9–14

Examinator: Maria Deijfen, tel. 08-16 45 91, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Måndag 26 augusti kl 10.00 i rum 321, hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Ett mynt kastas fyrtio gånger. Låt A vara händelsen att det blir klave i alla de tio sista kasten och låt B vara händelsen att det blir klave i alla kast som är delbara med fem (dvs kast nummer 5, 10, 15 etc). Vad är sant?

1. $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$
2. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$
3. $\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$

b) Betrakta följande funktion, där c är en konstant:

$$p(k) = \begin{cases} c & \text{om } k = 0; \\ 2c & \text{om } k = 1; \\ 3c & \text{om } k = 2. \end{cases}$$

Hur måste c väljas för att $p(k)$ ska vara en sannolikhetsfunktion?

1. $c = 1$
2. $c = 5/8$
3. $c = 6$
4. $c = 1/6$

c) Antag att kanalerna i Nederländerna fryser till och blir skridskodugliga någon gång under vintern med sannolikhet 0.2 och att detta sker oberoende mellan vintrar. Antalet år tills det ges möjlighet att åka skridskor längs kanalerna har en bekant sannolikhetsfördelning – vilken?

1. Binomial
2. Likformig
3. Negativ binomial
4. För-första-gången

d) Antag att $X \sim N(2, 4)$ och låt $Y = aX + b$. Hur ska a och b väljas för att $Y \sim N(0, 1)$?

1. $a = 1/2$ och $b = -1$
2. $a = 1/4$ och $b = -1$
3. $a = 1/2$ och $b = -2$
4. $a = 1/4$ och $b = -2$

e) Låt X vara en slumpvariabel med väntevärde $\mu \neq 0$ och varians σ^2. Då gäller enligt felfortplantningsformlerna:

1. $V\left(\frac{1}{1-X}\right) \approx \frac{\sigma^2}{(1-\mu)^4}$
2. $V\left(\frac{1}{1-X}\right) \approx \frac{\sigma^2}{(1-\mu)^2}$
3. $V\left(\frac{1}{1-X}\right) \approx \frac{\sigma^4}{(1-\mu)^4}$
4. $V\left(\frac{1}{1-X}\right) \approx \frac{\mu^2}{1-\sigma^2}$

Uppgift 2

Från en mellanstor flygplats opererar tre flygbolag. Bolag 1 står för 60% av avgångarna, bolag 2 för 30% och bolag 3 för 10%. Det gäller att 8% av bolag 1:s avgångar är försenade, 6% av bolag 2:s avgångar är försenade och 5% av bolag 3:s avgångar är försenade.

a) Vad är sannolikheten att ett slumpmässigt valt plan är försenat?

b) Vad är sannolikheten att ett försenat plan tillhör bolag 1?

Uppgift 3

Låt (X, Y) vara en tvådimensionell diskret stokastisk variabel. Antag att X antar värdena 0 och 1, medan Y antar värdena 0, 1 och 2. Låt (X, Y) ha den simultana sannolikhetsfunktionen

$p_{X,Y}(x, y)$	y=0	y=1	y=2
x=0	0.05	0.14	0.16
x=1	0.54	0.07	0.04

a) Beräkna de marginella sannolikhetsfunktionerna $p_X(x)$ och $p_Y(y)$.

b) Beräkna korrelationskoefficienten $\rho(X, Y)$.

Uppgift 4

På ett kontor arbetar 110 personer varav 50 är kvinnor. Genom en enkät har man fått reda på vilka som är vegetarianer: av de 60 männen är 15 vegetarianer och av de 50 kvinnorna är 22 vegetarianer. Två av de anställda väljs ut slumässigt (utan återläggning).

a) Beräkna sannolikheten att både personerna är vegetarianer.

b) Beräkna den betingade sannolikheten att båda personer är kvinnor, givet att de är vegetarianer.

c) Avgör om händelserna 'båda är kvinnor' och 'båda är vegetarianer' är oberoende. Svaret måste motiveras.

Uppgift 5

Anna tar samma buss till jobbet varje morgon. Bussen går var tolfte minut och antalet minuter som Anna får vänta på bussen en given morgon kan anses vara en stokastisk variabel som är kontinuerligt likformigt fördelad mellan 0 och 12 minuter. Anna hävdar att hon under ett år ägnar mer än ett dygn åt att stå och vänta på bussen på morgonen. Låt oss anta att Anna tar bussen till jobbet på morgonen 225 gånger på ett år och att väntetiderna olika dagar är oberoende.

a) Bestäm sannolikheten att Anna under ett år ägnar mer än ett dygn (1440 minuter) åt att vänta på bussen på morgonen.

b) Hur många gånger måste Anna ta bussen för att sannolikheten att hon sammanlagt väntar mer än ett dygn ska vara 99%?

Uppgift 6

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & \text{för } x \geq 0; \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

a) Ange täthetsfunktionen för den stokastiska variabeln $Z = e^X$.

b) Beräkna medianen för Z.

Lycka till!