STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
30 oktober 2019

Tentamen i Sannolikhetsteori I

30 oktober 2019 kl. 9–14

Examinator: Maria Deijfen, tel. 16 45 91, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Fredag 8 november kl 10.15 utanför sal 15, hus 5.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Påstående: För två händelser E och F gäller alltid att $\mathrm{P}(E \cap F^c) = \mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(F)$.

1. sant
2. falskt

b) Definiera följande händelser:
$A = \{$Ett symmetriskt mynt landar på krona$\}$
$B = \{$Tre oberoende försök, som vardera lyckas med sannolikhet 0.8, lyckas alla tre$\}$
$C = \{$Sju oberoende försök, som vardera lyckas med sannolikhet 0.9, lyckas alla sju$\}$
Vad gäller?

1. $\mathrm{P}(B) > \mathrm{P}(C) > \mathrm{P}(A)$
2. $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(C) > \mathrm{P}(B)$
3. $\mathrm{P}(C) > \mathrm{P}(B) > \mathrm{P}(A)$
4. $\mathrm{P}(C) > \mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$
5. $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B) > \mathrm{P}(C)$
6. $\mathrm{P}(B) > \mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(C)$

c) Modalvärdet för en stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x)$ definieras som det x-värde där $f(x)$ antar sitt maximum (värden nära modalvärdet är alltså de mest sannolika värdena för X). Vad är modalvärdet om X är exponentialfördelad med parameter λ?

1. 0 oavsett värdet på λ.
2. $\frac{1}{\lambda}$
3. λ

d) Låt X och Y vara stokastiska variabler med $\mathbb{E}[X] = \mu_x$ och $\mathbb{E}[Y] = \mu_y$. Vad är sant?

1. $\mathbb{E}[X + Y] = \mu_x + \mu_y$ bara om $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$.
2. Det gäller alltid att $\mathbb{E}[X + Y] = \mu_x + \mu_y$.
3. $\mathbb{E}[X + Y] = \mu_x + \mu_y$ bara om X och Y är oberoende.

e) Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler med $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 17$. Vad är sant?

1. $\text{Cov}(X, Y) = 17^2$
2. $\text{Cov}(X, Y) = 0$
3. $\text{Cov}(X, Y) = 17$
4. Man kan inte dra några slutsatser om $\text{Cov}(X, Y)$.

Uppgift 2

Nollor och ettor sänds i en brusig miljö. Sannolikheten att en nolla respektive etta sänds är 0.4 respektive 0.6. Den mottagna signalen kan beskrivas av en stokastisk variabel X som är N(0,1) om en nolla sänds och N(1,1) om en etta sänds. Mottagaren klassificerar en mottagen signal som en nolla om $X < 0.2$, och som en etta om $X \geq 0.2$.

a) Bestäm sannolikheten att en inkommande signal klassificeras som en nolla.

b) Antag att den mottagna signalen har klassificerats som en nolla. Bestäm sannolikheten att en nolla har sänts.

Uppgift 3

Fem personer – Anna, Beata, Caesar, Daniel och Emil – ställer sig i kö i slumpmässig ordning.

a) Beräkna sannolikheten att kvinnorna (Anna och Beata) står efter varandra.

b) Beräkna sannolikheten att kvinnorna hamnar före männen.

Uppgift 4

Erik får i uppgift att addera 120 tal, vardera med 10 decimaler. Av lathet bryr sig Erik dock inte om decimalerna vid additionen. Antag att decimaldelarna av de 120 talen kan uppfattas som likformigt fördelade på enhetsintervallet (0,1) och att de dessutom är oberoende av varandra. Låt X beteckna felet vid additionen som uppkommer på grund av strykningen av decimalerna (definierat så att $X \geq 0$). Bestäm $\mathrm{P}(X > 50)$.

Uppgift 5

I en fabrik tillverkas en viss typ av elektroniska komponenter. Livslängden hos en komponent är normalfördelad med väntevärde $\mu = 160$ dygn och varians σ^2, och livslängderna hos olika komponenter antas vara oberoende.

a) Ledningen vill garantera att sannolikheten att livslängden är mellan 120 och 200 är minst 0.8. Vad är det största värdet på σ som uppfyller detta? (Ju mindre σ, desto dyrare är tillverkningen av komponenter.)

b) Antag att man 190 dygn efter tillverkningen av komponenterna undersöker komponenterna en i taget. Vad är sannolikheten att man måste undersöka fler än två komponenter innan man hittar en som fortfarande fungerar?

Uppgift 6

En olycka inträffar i en punkt X som är likformigt fördelad på en väg av längd a. En ambulans finns vid denna tidpunkt i en punkt Y som också är likformigt fördelad på vägen och oberoende av X. Vad är täthetsfunktionen för avståndet mellan X och Y?

Lycka till!