STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
27 november 2019

Lösningar

27 november 2019

Uppgift 1

Rätt svar är

a) $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ för alla $A \subset S$

b) De tre händelserna är parvis oberoende men det gäller inte att $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

c) $\mathrm{P}(X = x) = F(x) - F(x-1)$

d) falskt

e) NegBin(2,p) om $p_1 = p_2 = p$

Uppgift 2

Låt B beteckna händelsen att den utvalde personen berömmer talet, och A, M och N händelserna att personen är anhängare, motståndare respektive neutral.

a) Lagen om total sannolikhet ger

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|M)\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(B|N)\mathrm{P}(N) \\ &= 0.95 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.65.\end{aligned}$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(M|B^c) = \frac{\mathrm{P}(B^c|M)\mathrm{P}(M)}{\mathrm{P}(B^c)} = \frac{1 \cdot 0.2}{1 - 0.65} = 0.57.$$

Uppgift 3

a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^1 8xydy = 4x(1-x^2) & \text{för } x \in [0,1]; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 8xydx = 4y^3 & \text{för } y \in [0,1]; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

b) Vi har att $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 4x^2(1-x^2)dx = 8/15$ och $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 4y^4 dy = 4/5$. Vidare har vi att $\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^y 8x^2y^2 dxdy = 4/9$, och alltså $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[XY] = 0.0178$.

Uppgift 4

a) Vi analyserar situationen som slumpmässig dragning av åtta element (=skor) utan återläggning med hänsyn tagen till ordning. Antalet möjliga utfall är $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$. Antalet utfall där högst en sko från varje par ingår är $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6$. Eftersom alla utfall har samma sannolikhet ges den sökta sannolikheten av

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = 0.091.$$

b) Vi analyserar nu situationen som slumpmässig dragning av åtta element (=skor) utan återläggning och utan hänsyn tagen till ordning. Antalet möjliga utfall är $\binom{20}{8}$ och antalet utfall som innehåller exakt ett par är $10 \cdot \binom{9}{6} \cdot 2^6$ (först väljer vi vilket par som ska ingå, sen väljer vi vilka par de övriga sex skorna ska komma ifrån och därefter vilken sko i paret som ska ingå). Den sökta sannolikheten ges alltså av

$$\frac{10 \cdot \binom{9}{6} \cdot 2^6}{\binom{20}{8}} = 0.4268.$$

Uppgift 5

Låt X_i beteckna antalet böcker som bibliotek i beställer ($i = 1, \dots, 100$).

a) Vi har att $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{3}(20+30+40) = 30$ och $\mathbb{E}[X_i^2] = \frac{1}{3}(20^2+30^2+40^2) = 966.67$, och alltså $\mathrm{Var}(X_i) = 966.67 - 30^2 = 66.67$.

b) Låt $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ beteckna det totala antalet böcker som biblioteken beställer. Då är $\mathbb{E}[S] = 100 \cdot \mathbb{E}[X_i] = 3000$ och eftersom $\{X_i\}$ är oberoende så fås att $\mathrm{Var}(S) = 100 \cdot \mathrm{Var(X_i)} = 6667$. Eftersom S är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler så säger Centala gränsvärdessatsen att dess fördelning approximeras väl av en normalfördelning, dvs $S \approx N(3000, 6667)$. Vi söker n så att $\mathrm{P}(S \leq n) = 0.95$. Enligt ovanstående approximation ges n av

$$\frac{n - 3000}{\sqrt{6667}} = \lambda_{0.05} = 1.6449$$

dvs $n = 3000 + 1.6449 \cdot \sqrt{6667} = 3134.3$. Man måste alltså trycka 3135 böcker.

Uppgift 6

Vi har att $X \sim \mathrm{Exp}(1/3)$, dvs $F_X(x) = 1 - e^{-x/3}$ för $x > 0$.

a) Vi söker fördelningen för $Y = e^{-X}$ och får för $y \in [0, 1]$ att

$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(e^{-X} \leq y) = \mathrm{P}(X \geq -\ln y) = 1 - F_X(-\ln y) = y^{1/3}$,

dvs $f_Y(y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$ och $f_Y(y) = 0$ för övriga y.

b) Vi får $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}\int_0^1 y^{1/3} dy = 1/4$ och $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{3}\int_0^1 y^{4/3} dy = 1/7$, dvs $\mathrm{Var}(Y) = 1/7 - (1/4)^2 = 0.08$.

c) Enligt felfortplantningsformlerna gäller att $\mathbb{E}[e^{-X}] \approx e^{-\mathbb{E}[X]} = e^{-3} = 0.05$ och $\mathrm{Var}(e^{-X}) \approx e^{-2\mathbb{E}[X]} \cdot \mathrm{Var}(X) = e^{-6} \cdot 3^2 = 0.02$.