STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
Stokastiska processer och simulering II
Onsdagen den 7 januari 2009

Tentamen för kursen Stokastiska processer och simulering II

Onsdagen den 7 januari 2009 9 - 14

Examinator: Anders Björkström, tel. 16 45 54.
Återlämning: Måndag 12/1 2009 kl 14.00. Rum 312, hus 6. Den som vill veta sitt resultat tidigare kan skicka en förfrågan till bjorks@math.su.se.
Lösningar finns på kursens hemsida (kurser.math.su.se) fr. o. m. skrivtidens slut.
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Utdelad formelsamling och normalfördelningstabell.
Krav för godkänt: För lägsta godkända betyg krävs minst tio poäng på teoridelen och tjugo poäng på problemdelen. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa.

Problemdel: Uppgift 1

Köpcentrumet i Grötköping består av två våningsplan. För att komma till det övre planet kan kunderna välja mellan hiss och rulltrappa. Tyvärr fungerar inte alltid båda. En nyreparerad rulltrappa har en livslängd som är likformigt fördelad mellan 0 och 150 dygn, en nyreparerad hiss har en livslängd som är likformigt fördelad mellan 0 och 200 dygn. Så länge inte båda är sönder bryr sig fastighetsbolaget inte om att reparera, men när båda är sönder repareras båda omedelbart. Stina har ett konditori på köpcentrumets övre plan. Hon förlorar 1000 kronor per dygn genom minskad försäljning när inte både hissen och rulltrappan fungerar. Hur mycket pengar förlorar hon i genomsnitt per dygn, i det långa loppet? (Köpcentrumet, liksom Stinas konditori, har öppet 24 timmar om dygnet, så vi kan betrakta tiden som en kontinuerlig variabel.) (10 p)

Problemdel: Uppgift 2

a) Kapitalet i Kalles plånbok, räknat i kronor, varierar med tiden enligt formeln $K(t) = 1000X(t)$ där $K(t)$ är kapitalet och $X(t)$ är geometrisk Brownsk rörelse med driftkoefficient $\mu = 0$ och variansparameter $\sigma^2 = 1$. Tiden t anges i månader. När kapitalet blir tio kronor eller mindre måste Kalle be sin rike farbror om ett lån. Detta är en obehaglig upplevelse för Kalle, eftersom farbrorn alltid håller en klandrande moralpredikan innan han betalar ut lånet. Just nu har Kalle 1000 kronor i kassan. Beräkna sannolikheten att han tvingas be sin farbror om pengar inom de närmaste tre månaderna. (5 p)

b) Hur mycket pengar har Kalle i plånboken om risken att han ska tvingas be sin farbror om hjälp inom tre månader är fem procent? (5 p)

Problemdel: Uppgift 3

Funktionen $H(x) = e^x/(e^x + 1)$ växer monotont från 0 till 1 när x går från $-\infty$ till ∞. Den är alltså en fördelningsfunktion för en reellvärd stokastisk variabel.

a) Beskriv ett sätt att simulera slumptal med fördelningen H. Det är tillåtet att utgå från att vi har möjlighet att simulera slumptal U som är likformigt fördelade på intervallet $[0, 1]$. (5 p)

b) För en simuleringsstudie behöver man ett stort antal slumptal från fördelningen H, och man beslutar sig för att konstruera dem i par så att de båda talen i varje par är negativt korrelerade till varandra. Ett av talen är 0.37. Vad är det motsvarande negativt korrelerade slumptalet, om man använder antitetiska variabler? (5 p)

Problemdel: Uppgift 4

Den stokastiska processen $Z(t)$, $0 \leq t \leq \infty$ är integrerad Brownsk rörelse.

a) Beräkna det förväntade värdet av $Z(2)$ givet att $Z(1) = 3.15$. (5 p)

b) Beräkna den betingade standardavvikelsen för $Z(2)$ givet $Z(1) = 3.15$.

(5 p)

Ledning: Kovariansfunktionen för integrerad Brownsk rörelse är $R(s,t) = s^2(t/2 - s/6)$ där $s \leq t$.

Teoridel: Uppgift 1

De stokastiska variablerna Z_1, Z_2, ... är oberoende och likafördelade och har variansen 1. Vi bildar en stokastisk process X_n, $n = 1, 2, \ldots$ genom definitionen

$$X_n = 0.1\,Z_n + 0.2\,Z_{n+1} + 0.3\,Z_{n+2} + 0.4\,Z_{n+3}.$$

a) Beräkna kovariansfunktionen för processen X_n. (7 p)

b) Uppfyller X_n definitionen av en svagt stationär process? (3 p)

Teoridel: Uppgift 2

Låt $\{N(t),\, t \geq 0\}$ vara en förnyelseprocess där intervallen mellan successiva förnyelser har en kontinuerlig fördelning, låt S_n vara tidpunkten för den n:te förnyelsen och låt F_n vara fördelningsfunktionen för S_n, $n = 1, 2, \ldots$.

a) Sannolikheten $\mathrm{P}(N(t) = n)$ kan uttryckas med hjälp av funktionerna F_1, F_2, ... Härled en formel som ger detta samband. (3 p)

b) Om tiderna mellan successiva förnyelser är oberoende Un(0,1), beräkna fördelningen för $N(1)$. (4 p)

c) Om tiderna mellan successiva förnyelser är oberoende Un(0,1), och t är ett tal mellan 0 och 1, beräkna $\mathrm{E}[N(t)]$. (3 p)

Lycka till!