STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
Stokastiska processer och simulering II
Onsdagen den 7 januari 2009

Lösningar till tentamen för kursen Stokastiska processer och simulering II

Onsdagen den 7 januari 2009 9 - 14

Examinator: Anders Björkström, tel. 16 45 54, bjorks@math.su.se

---

Problemdel: Uppgift 1

Vi kan betrakta systemet som en alternerande förnyelseprocess, som är i tillståndet "On" när både hissen och rulltrappan fungerar och "Off" när endera är sönder. Andelen tid som spenderas i tillståndet "Off" är i det långa loppet

$$\frac{\text{E[off]}}{\text{E[on] + E[off]}}.$$

där E[on] och E[off] är väntevärdena av tiden i "On" respektive "Off" under en cykel. Om rulltrappans livslängd betecknas R och hissens H så inser vi att

$$\frac{\text{E[off]}}{\text{E[on] + E[off]}} = \frac{\text{E[max (R,H) - min (R,H)]}}{\text{E[max (R,H)]}}.$$

Eftersom R är Un(0,α) och H är Un(0,β) oberoende av R, där $\alpha < \beta$, så får vi att

$$\mathrm{E}[\,\min(R,H)] = \int_0^\alpha \mathrm{P}(\,\min(R,H) > z)\,dz = \int_0^\alpha \mathrm{P}(R > z)\,\mathrm{P}(H > z)\,dz =$$

$$= \int_0^\alpha (1 - z/\alpha)(1 - z/\beta)\,dz \,=\, \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{6\beta}.$$

Eftersom $\min(R,H)+\max(R,H) = R+H$ så följer $\mathrm{E}[\ \max(R,H)] = \alpha/2 + \beta/2 - \mathrm{E}[\ \min(R,H)] = \beta/2 + \alpha^2/6\beta$ vilket ger

$$\frac{\text{E[max (R,H) - min (R,H)]}}{\text{E[max (R,H)]}} = \frac{3\beta^2 - 3\alpha\beta + 2\alpha^2}{3\beta^2 + \alpha^2}.$$

Med $\alpha = 150$ och $\beta = 200$ är kvoten ungefär 0.5263. Stina går alltså miste om ungefär 530 kronor per dygn i det långa loppet.

Problemdel: Uppgift 2

a)Vi kan skriva kapitalet vid tiden t som $K(t) = 1000\, e^{B(t)}$ där $B(t)$ är standardiserad Brownsk rörelse. Just nu är $K(t) = 1000$, dvs $B(t) = 0$. Händelsen $K(t) = 10$ är ekvivalent med $B(t) = \ln 0.01 = -4.605$. Problemet är likvärdigt med att beräkna $\mathrm{P}(T_a < 3)$ där T_a är träfftiden för nivån $a = -4.605$. För T_a gäller fördelningen $\mathrm{P}(T_a \le t) = 2(1 - \Phi(|a|/\sqrt{t}))$, med $t = 3$ får man med hjälp av normalfördelningstabell att den sökta sannolikheten är 0.008.

b)Beteckna det sökta beloppet K_0. Att kapitalet faller från K_0 kronor till 10 kronor är ekvivalent med att processen $B(t)$ rör sig från 0 till $\ln(10/K_0)$ inom tre månader. Sannolikheten att detta ska hända är $2\,(1-\Phi(|\ln(10/K_0)|/\sqrt{3}))$. Om denna sannolikhet skall vara 0.05 så krävs $\Phi(|\ln(10/K_0)|/\sqrt{3}) = 0.975$, dvs $|\ln(10/K_0)|/\sqrt{3}) = 1.96$, dvs $|\ln(10/K_0)| = 1.96\sqrt{3} = 3.395$. Det sökta beloppet är givetvis större än 10 kronor, så vi får $K_0 = 10\, e^{3.395} \approx 300$. Kalle behöver alltså ha ungefär 300 kronor i plånboken.

Problemdel: Uppgift 3

a) Vi kan använda inversa transformationsmetoden, alltså generera slumptal enligt formeln $X = H^{-1}(U)$, där U är Un(0,1). För att hitta inversen H^{-1} gör vi ansatsen $u = e^x/(e^x+1)$ och löser ut $x = \ln(u/(1-u))$. Eftersom U har samma fördelning som $1-U$ kan vi lika gärna skriva $X = \ln(1/U - 1)$.

b) Antitetiska variabler innebär att om det första utfallet motsvarar en viss övre kvantil i fördelningen så låter man det andra utfallet motsvara samma undre kvantil. Med andra ord, om det första utfallet $x_1 = H^{-1}(u_1)$ så låter man det andra bli $x_2 = H^{-1}(1-u_1)$. Sätter man här in $u_1 = H(x_1)$ så får man $x_2 = H^{-1}(1 - H(x_1)) = -x_1$. (Detta visar att fördelningen är symmetrisk runt $x = 0$.) Med $x_1 = 0.37$ får vi alltså $x_2 = -0.37$.

Problemdel: Uppgift 4

a) Eftersom väntevärdesfunktionen för integrerad Brownsk rörelse är noll så får vi med hjälp av formelsamlingen: $\mathrm{E}[Z(2)|Z(1) = 3.15] = 0 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(3.15 - 0)$. Här är

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(Z(1), Z(2))}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z(1))\mathrm{Var}(Z(2))}}$$

Med hjälp av kovariansfunktionen $R(s,t)$ för integrerad Brownsk rörelse får vi

$$\sigma_2^2 = \mathrm{Var}(Z(2)) = R(2,2) = 8/3$$

$$\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(Z(1)) = R(1,1) = 1/3$$

och

$$\mathrm{Cov}(Z(1), Z(2)) = R(1,2) = 5/6$$

Allt detta ger $\mathrm{E}[Z(2)|Z(1) = 3.15] = (2.5)(3.15) = 7.875$.

b) Den betingade variansen för $Z(2)$ när $Z(1)$ är känd är enligt formelsamlingen $\sigma_2^2(1 - \rho^2) = (8/3)(7/32) = 7/12$. Standardavvikelsen är alltså $\sqrt{7/12} \approx 0.7638$.

Teoridel: Uppgift 1

a) Kovariansfunktionen är per definition $\mathrm{Cov}(X_m, X_n)$ som funktion av n och m. I det här fallet blir det enklast om man går över till beteckningen $R(m,n) = \mathrm{Cov}(X_m, X_{m+n})$. Då får vi

$$R(m,n) = \mathrm{Cov}(0.1\, Z_m + 0.2\, Z_{m+1} + 0.3\, Z_{m+2} + 0.4\, Z_{m+3}\,,$$

$$0.1\, Z_{m+n} + 0.2\, Z_{n+m+1} + 0.3\, Z_{n+m+2} + 0.4\, Z_{n+m+3}).$$

Eftersom Z_1, Z_2, ... är oberoende så är $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = 0$ så snart $i \neq j$, och då ser vi att

med $n = 0$ får vi $R(m,0) = \mathrm{Var}(X_m) = 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 = 0.30$,

med $n = 1$ får vi $R(m,1) = \mathrm{Cov}(0.1\, Z_m + 0.2\, Z_{m+1} + 0.3\, Z_{m+2} + 0.4\, Z_{m+3}\,, 0.1\, Z_{m+1} + 0.2\, Z_{m+2} + 0.3\, Z_{m+3} + 0.4\, Z_{m+4}) = 0.02 + 0.06 + 0.12 = 0.20$,

med $n = 2$ får vi på liknande sätt $R(m,1) = 0.11$ och med $n = 3$ får vi $R(m,3) = 0.04$. För $n \geq 4$ är $R(m,n) = 0$.

b) Eftersom alla variablerna Z_n är likafördelade så har de samma väntevärde, och därför har också X_n samma väntevärde för alla n. Vidare såg vi i a-delen att $R(m,n)$ bara beror på n, inte på m. Processen X_n är alltså svagt stationär.

Teoridel: Uppgift 2

a) Eftersom händelsen $S_n \leq t$ är samma som $N(t) \geq n$ så är deras sannolikheter lika, dvs $\mathrm{P}(N(t) \geq n) = F_n(t)$, som ger $\mathrm{P}(N(t) = n) = \mathrm{P}(N(t) \geq n) - \mathrm{P}(N(t) \geq n+1) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$.

b) När förnyelseintervallen är Un(0,1) så gäller för alla t mellan 0 och 1 att $F_n(t) = t^n/n!$ för alla n. Detta visas enkelt med induktion: Antagandet $F_n(t) = t^n/n!$ och konvolutionsformeln $F_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x) f_Y(t-x)\, dx$ ger $F_{n+1}(t) = \int_0^t x^n/n!\ 1\ dx = t^{n+1}/(n+1)!$. Alltså är $\mathrm{P}(N(t) = n) = t^n/n! - t^{n+1}/(n+1)!$ som ger den sökta fördelningen $\mathrm{P}(N(1) = n) = 1/n! - 1/(n+1)! = n/(n+1)!$ för $n = 0, 1, \ldots$.

c) Eftersom $\mathrm{E}[N(t)] = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(N(t) \geq n)$ så får vi $\mathrm{E}[N(t)] = \Sigma_{n=1}^{\infty} t^n/n! = e^t - 1$.
