STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
Stokastiska processer och simulering II
Tisdagen den 26 maj 2009

Tentamen för kursen
Stokastiska processer och simulering II

Tisdagen den 26 maj 2009 9 - 14

Examinator: Anders Björkström, tel. 16 45 54.
Återlämning: Fredag 29/5 2009 kl 15.00. Rum 312, hus 6. Den som vill veta sitt resultat tidigare kan skicka en förfrågan till bjorks@math.su.se.
Lösningar finns på institutionens webbplats fr. o. m. skrivtidens slut.
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Utdelad formelsamling och normalfördelningstabell.
Krav för godkänt: För lägsta godkända betyg krävs minst tio poäng på teoridelen och tjugo poäng på problemdelen. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa.

Problemdel: Uppgift 1

a) Processen $X(t)$ utvecklar sig för $t \geq 0$ som Brownsk rörelse med drift. Man vet att $X(5)$ har väntevärde 5 och standardavvikelse 5. Beräkna sannolikheten att $X(2)$ är större än 1. (5 p)

b) Även processen $Y(t)$ utvecklar sig för $t \geq 0$ som Brownsk rörelse, men utan drift. Man vet att $Y(5)$ har variansen 5. (Observera att det står *varians* här, inte standardavvikelse.) Hur sannolikt är det att $Y(t)$ för *något* t mellan 0 och 5 är större än 1? (5 p)

Problemdel: Uppgift 2

a) En dygnet-runt-öppen radiohandlare har plats för 12 TV-apparater i sitt lager. Kunder som vill köpa TV anländer enligt en Poissonprocess med intensiteten 1 kund per dag. När den näst sista apparaten säljs ringer handlaren och beställer påfyllning. Den tid det därefter tar innan lagret blir påfyllt är exponentialfördelad med väntevärde tre dygn. Kunder som kommer medan lagret är tomt köper ingen TV. Hur stor del av alla kunder går på detta sätt förlorade för handlaren? (7 p)

b) Hur många TV-apparater säljer handlaren i genomsnitt under en månad (30 dagar)? (Om du inte lyckas lösa a-delen kan du beteckna andelen förlorade kunder med P_0 och svara med en funktion av P_0.) (3 p)

Problemdel: Uppgift 3

När en passagerare skall checka in för en flight med Random Airways måste han eller hon först få sitt pass kontrollerat, och därefter få sitt bagage vägt. Tidsåtgången för passkontrollen är approximativt normalfördelad med väntevärde 1 minut och standardavvikelse 15 sekunder. Tiden för att väga bagaget, i minuter räknat, är likformigt fördelad mellan 3 och 5 minuter. Det finns bara en tjänsteman tillgänglig för att utföra båda uppgifterna, så passkontrollen för en passagerare kan inte påbörjas innan bagagevägningen för passageraren närmast före är avslutad. Passagerare anländer till incheckningsdisken enligt en Poissonprocess med intensiteten en var sjätte minut. När tjänstemannen inte har något att göra läser han en äventyrsbok om den berömde flygaren Biggles.

a) Hur stor del av tiden kommer tjänstemannen att sitta och läsa om Biggles, i det långa loppet? (3 p)

b) Tjänstemannen läser en sida i minuten. Hur många sidor hinner han i genomsnitt läsa under en ledig period? (3 p)

c) Antag att passagerarna inte anländer en och en, utan att de kommer åkande i små bussar, som alltid innehåller exakt tio passagerare. Tillströmningen av sådana bussar utgör en Poissonprocess med intensiteten en per timme. Förhållandena i övrigt är desamma som a- och b-uppgifterna. Beräkna nu hur stor del av tiden som tjänstemannen kommer att sitta och läsa, och hur många sidor han läser under varje ledig period. (4 p)

Ledning: För en M/G/1-kö där kundtillströmningen har intensitet λ gäller

$$\mathrm{E}[B] = \frac{\mathrm{E}[S]}{1 - \lambda\,\mathrm{E}[S]}$$

där B betyder längden av en busy period, alltså en sammanhängande tidsrymd under vilken systemet aldrig är tomt. $\mathrm{E}[S]$ är väntevärdet av tiden för en betjäning. Denna formel får användas utan bevis.

Problemdel: Uppgift 4

Kalle kör taxi när han behöver förstärka sin kassa, och då fördelar han sin tid såhär: En del av tiden (en försumbart liten del) står han stilla och väntar vid ett av sina tre favoritställen, som ligger på Södermalm, i Vasastan och på Östermalm. Resten av tiden spenderar han på väg från ett av dessa tre ställen till något av de båda andra (han accepterar inga körningar till några andra platser). Han har upptäckt att han växlar mellan de tre stadsdelarna på ett sätt som kan beskrivas av en Markovkedja med övergångsmatrisen (tillstånden kommer i ordningen S, V, Ö):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

Kalle har vidare märkt att körningar som börjar på Södermalm tar tider som är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde tio minuter, alla körningar som börjar i Vasastan tar exakt 8 minuter, och alla körningar som börjar på Östermalm tar tider som är likformigt fördelade mellan 0 och θ, där $\theta = 10$ om körningen går till Södermalm och $\theta = 16$ om körningen går till Vasastan. Passagerare som åker från Vasastan till Södermalm uppfattas av Kalle som särskilt irriterande, ty de pratar intensivt och oupphörligt om sina likgiltiga fritidssysselsättningar. Hur stor del av arbetstiden tvingas Kalle lyssna till sådana irriterande berättelser? (10 p)

Teoridel: Uppgift 1

Definiera vad som menas med

a) en räkneprocess, (3 p)

b) en förnyelseprocess. (3 p)

c) Om tiden mellan två händelser i en förnyelseprocess är Un(0.8,1.2), vad är $\mathrm{P}(N(1.1) \geq 2)$? (4 p)

Teoridel: Uppgift 2

Processen X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ är konstruerad så att $X_0 = Z_0$ och $X_n = \lambda X_{n-1} + Z_n$ för $n \geq 1$, där alla Z_n är oberoende $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$. Konstanten λ är ett tal mellan 0 och 1.

a) Beräkna den betingade fördelningen för X_4 givet $X_2 = x$. (5 p)

b) Antag $\lambda = 1$ och beräkna den betingade fördelningen för X_2 givet $X_4 = x$. (5 p)

Lycka till!