STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
12 Januari 2010

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II

12 Januari 2010 kl. 9–14

Examinator: Åke Svensson, tel. 16 45 69, akes@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling
Återlämning: Hos examinator, rum 318, hus 6, fredagen 15/1 kl 10.00 eller enligt överenskommelse.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Gränsen för lägsta godkända betyg är 10 poäng på teoridelen och 20 poäng på problemdelen. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa.

Teoridel: Uppgift 1

a) Beskriv hur man kan använda 'the rejection method' for att simulera stokastiska variabler med en given täthet. (6p)

b) Vad menas med antitetisk sampling? (4p)

Teoridel: Uppgift 2

a) Formulera den fundamentala kostnadsrelationen (Littles formel) (6p)

b) Härled hjälp av Littles formel en relation mellan medelantalet kunder i ett kösystem och medeltiden som kunder tillbringar i systemet. (4p)

Uppgift 3

En viss typ av händelser inträffar enligt en Poissonprocess med intensiteten 20 per minut. Man har tillgång till en apparat som registrerar tidpunkterna för dessa händelser. Efter en registrerad händelse är apparaten 'spärrad' under en stokastisk tid, S, med $\mathrm{E}(S) = 1$ sekund. Under denna tid kan inga händelser registreras. Antag att vi börjar registrera händelser vid $t = 0$.

a) Visa att de registrerade händelserna inträffar enligt en fördröjd förnyelseprocess. (5p)

b) Hur stor andel av händelserna kommer att bli registrerade? (5p)

Uppgift 4

Låt $X(t)$ vara en standard Brownsk brygga definierad för $t \in [0, 1]$, och låt Z vara en en stokastisk variabel som är oberoende av processen X. Antag dessutom att Z är normalfördelad med väntevärde 0 och varians 1. Låt

$$Y(t) = X(t) + tZ$$

för $0 \leq t \leq 1$.

a) Beräkna $\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t))$. (5p)

b) Visa att processen Y har oberoende inkrement, dvs att om $0 \leq t_1 < t_2, ..., t_n \leq 1$, så är

$$Y(t_n) - Y(t_{n-1}), Y(t_{n-1}) - Y(t_{n-2}), \ldots, Y(t_2) - Y(t_1), Y(t_1)$$

oberoende. (5p)

Uppgift 5

En viss typ av händelser inträffar dagligen enligt en förnyelseprocess. Låt X beteckna tiden mellan succesiva händelser. Under en lång följd av dagar har man noterat när den första och andra händelsen efter kl 12.00 inträffar. I medel inträffar den första händelsen efter kl 12.00 efter 5.6 min (kl 12.05.6) och den andra händelsen efter 16.5 minuter (kl 12.16.5).

Antag att processen kl 12.00 har varit igång under tillräckligt lång tid för att asymptotiska resultat skall vara tillämpliga.

a) Beräkna $\mathrm{E}(X)$. (4p)

b) Beräkna $\mathrm{Var}(X)$. (6p)

Uppgift 6

Vi studerar en M/M/1-kö där kunderna kommer med intensiteten $\lambda = 2/\mathrm{tim}$ och har medelbetjäningstiden 12 minuter. Systemet växlar mellan att vara tomt (idle, I) och upptaget (busy, B). Tomma och upptagna perioder bildar en alternerande förnyelseprocess. Beräkna

a) Beräkna hur stor andel av kunderna som kommer till ett tomt system och alltså inte behöver vänta innan de betjänas. (3p)

b) Beräkna $\mathrm{E}(B)$. (3p)

c) Beräkna hur många kunder som i medel betjänas under en upptagen (busy) period. (Ledning: använd resultatet i a)). (4p)