STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, ÅS

LÖSNINGAR
12 januari 2010

Lösningar

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II, 12 januari 2010

Uppgift 1

a) Man vill simulera en stokastisk variable med täthet f. Starta med att generera en stokastisk variabel,Y, med täthet g, sådan att $f(y)/g(y) \leq c$ för alla y. Här bör g väljas så att den är enklare att generera från än från f. Simulera också en likformigt fördelad stokastisk variable U. Om $U \leq f(Y)/cg(Y)$ så välj $X = Y$ annars förkasta Y och generera ett nytt par (Y, U). Man kan visa att X har tätheten f.

b) Om man vill skatta ett medelvärde med Monte Carlo-simulering lönar det sig att generera negativt korrelerade slumptal eftersom då gäller att

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X+Y)}{2}.$$

Uppgift 2

a) Antag att varje kund måste betala en avgift till systemet vid ankomsten. Avgiften kan bero på hur systemet ser när kunden kommer och vilka krav kunden har på systemet. Om λ_a är medelintensiteten med vilken kunder kommer till systemet. Då gäller

(medelinflöde av betalning till systemet)=λ_ax (medelbelopp som en anländande kund betalar).

b) Antag att en ankommande kund betalar 1 kr per tidsenhet som han finns i systemet då gäller (medelantalkunder i systemet) = λ_ax (medeltid för en kund i systemet), dvs

$$L = \lambda_a W.$$

Om kunden endast betalar när han står i kö (men inte under betjäning) så gäller

(medelantal kunder i kö) =λ_ax (medelkötid för en kund).

Uppgift 3

a) Tiden till första händelsen registreras är exponentialfördelad med väntevärder 3 sekunder. Därefter är systemet spärrat S_1 tidsenheter. Tiden mellan första och andra händelsen är allts $S_1 + X_1$ där X_1 är exponentialfördelad med väntevärde 3 sekunder. Övriga händelser som registreras sker med denne mellantidsfördelning. Alltså har vi en förnyelseprocess där tiden till första händelsen följer en annan fördelning.

b) Processen kan också ses som en alternerande förnyelseprocess där de spärrade perioderna varar i medel 1 sekund och öppna perioder som i medel är 3 sekunder långa. Under en spärrad period inträffar i medel 1/3 hänelser och under den registrerade perioden inträffar exakt 1 händelse. Det innebär att 1/4 av antalet händelser blir oregistrerade. Man kan också se att registreringsapperaturen fungerar 3/4 av tiden.

Uppgift 4

a) Om $s \leq t$ så gäller för en Brownsk brygga

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = s(1-t).$$

Det följer att

$$\mathrm{Cov}(X(s) + sZ, X(t) + tZ) = S(1-t) + st = s = \min(s,t).$$

b) $Y(t)$ har väntevärdet 0. Y är normalfördelad och väntevärden och kovarianser stämmer med en Brownsk rörelse (på intervallet $[0,1]$ så måste Y vara en sådan process. En Brownsk rörelse har oberoende inkrement. (Man kan också räkna ut kovarianserna mellan inkrement. Det visar sig att dessa blir 0 vilket medför oberoende eftersom vi har normalfördelade variabler.

Uppgift 5

a) Tiden mellan den första och andra händelsen efter kl 12.00 avspeglar ett typiskt intervall mellan händelser. Alltså gäller (med approximation) att

$$\mathrm{E}(X) = 16.5 - 5.6 = 10.9$$

minuter.

b) Tiden till första händelsen efter kl 12.00 är en excesstid. Vi vet att en sådan tid har väntevärdet $\mathrm{E}(X^2)/(2\mathrm{E}(X))$. Vi kan alltså (med approximation) skatta

$$\mathrm{E}(X^2) = 5.6 * 2 * 10.9$$

och

$$\mathrm{Var}(X) = 5.6 * 2 * 10.9 - (10.9)^2 = 0.3 * 10.9 = 3.27.$$

Uppgift 6

Vi har en M/M/1-kö med ankomstintensitet $\lambda = 2$ och betjäningsintensitet $\mu = 5$ om vi använder tidsenheten timmar.

a) Låt a_0 beteckna medelantalet kunder som kommer till ett tomt system och P_0 sannolikheten att systemet är tomt (efter lång tid). Sannolikheten att systemet skall vara tomt (efter lång tid) i en M/M/1-kö är generellt $1 - \lambda/\mu$. I detta fall $P_0 = 3/5$. I ett kösystem av denna typ så gäller $a_0 = P_0$. Alltså kommer 60 % av kunderna att anlända till ett tomt system.

b) Tomma och upptagna tider bildar en alternerande förnyelseprocess. Andelen tid som systemet är tomt är i medel

$$\frac{\mathrm{E}(I)}{\mathrm{E}(I) + \mathrm{E}(B)}$$

Vi vet att $\mathrm{E}(I) = 1/2$. Beräkningar ger att

$$\mathrm{E}(B) = 1/3,$$

dvs 20 minuter.

c) Låt C vara antal kunder som betjänas under en upptaget period. Endast den första kunden som betjänas under en upptagetperiod kommer till ett tomt system. Övriga kommer till ett upptaget system. Det gäller alltså att $a_0 = \frac{1}{\mathrm{E}}(C)$. och

$$\mathrm{E}(C) = 5/3.$$