STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, TH

MS 2210
LÖSNINGAR TENTAMEN
16 december 2011

Lösningar

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II, 16 december 2011

Teoridel: Uppgift 1

a) Vi ska simulera en stokastisk variabel X med täthet f med hjälp av slumptal från en fördelning med täthet g som uppfyller $f(x) \leq cg(x)$ för alla x och något c.

1. Simulera Y från g och U från den likformiga fördelningen på $(0, 1)$.

2. Om $U \leq f(Y)/cg(Y)$, sätt $X = Y$ annars börja om vid 1.

Då har X tätheten f.

b) Vi vill skatta $\theta = E[h(X)]$ medelst simulering med $\theta^* = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} h(X_i)$.

Antitetisk sampling är följande metod för att reducera skattningens varians: Antag att X har fördelningsfunktionen F och att h är monoton. Låt U_i vara $Un(0, 1)$ och sätt $Y_1 = F^{-1}(U_i)$, $Z_1 = F^{-1}(1 - U_i)$, då är Y_i och Z_i negativt korrelerade och $\theta^{**} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(h(Y_i) + h(Z_i))$ får mindre varians än θ^* då $X_1, ..., X_{2n}$ är oberoende.

Teoridel: Uppgift 2

a) Om en följd positiva stokastoska variabler $X_1, X_2, ...$ är oberoende och likafördelade så sägs den motsvarande räkneprocessen $N(t) = \max\{n; S_n \leq t\}$ vara en förnyelseprocess. Här är $S_0 = 0$ och $S_n = X_1 + ...X_n$ för $n = 1, 2, ...$

b) $1/E[X_1]$. (Konvergensen gäller med sannolikhet 1.)

c) En sammansatt förnyelseprocess är en förnyelseprocess som i (a) tillsammans med en följd $R_1, R_2, ..$ av oberoende stokastiska variabler kallade belöningar som utbetalas vid tidpunkterna $S_1, S_2, ...$

Uppgift 3

a) Nej ingetdera. Kovariansfunktionen $Cov(X(s), X(t)) = \min(s, t)$ är inte en funktion av $t - s$. Därför är processen inte svagt stationär och därmed inte heller stationär.

b) Låt T_a beteckna tiden då nivån a uppnås för första gången. Händelsen $B(t) < a$ för alla $t \leq T$ är densamma som $T_a > T$. Vi har $P(T_a \leq t) = 2P(X(t) \geq a)$ och därför

$$P(T_a > T) = 1 - 2P(X(T) \geq a) = 1 - 2(1 - \phi(\frac{a}{\sqrt{T}})) = 2\phi(\frac{a}{\sqrt{T}}) - 1.$$

c) Denna sannolikhet är 0 vilket följer av (b) om man låter $T \to \infty$.

d) Sannolikheten att en Brownsk rörelse går upp A innan den går ner B är $B/(A + B)$. Av symmetriskäl är sannolikheten för (d) därför är $a/(a + b)$.

Uppgift 4

Det genomsnittliga antalet kunder i systemet är $L = \lambda W$, där λ är ankomstintensiteten och W förväntad tid i systemet. Då $\lambda = 1/3$ är

$$W = W_Q + E[S] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} + E[S] = \frac{\frac{1}{3}((1/9)^2 + (2/3)^2)}{2(1 - \frac{1}{3} \cdot 2/3)} + 2/3 = \approx 0.84.$$

Därför är $L \approx 0.255$.

Det tar $\lambda E[S] = 4/3 > 1$ minuter att betjäna de kunder som anländer under en minut om $\lambda = 2$. Därför kommer kön att växa över alla gränser i detta fall.

Svar: Förväntat antal kunder i systemet är 0.255 då $\lambda = 1/3$. I det andra fallet växer antalet kunder över alla gränser.

Uppgift 5

Man kan se detta som en regenerativ process som börjar om varje gång spelare 1 börjar kasta. Cykellängden blir

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

där X_i är antalet kast spelare i gör under en cykel. Proportionen kast för spelare i blir därför

$$\frac{E[X_i]}{E[X]} = \frac{\frac{1}{1-p_i}}{\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{1-p_j}}.$$

Alternativ kan man se detta som en Markovkedja med tillstånden $1, 2, 3$ och övergångssannolikheterna

$$\begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 1-p_2 \\ 1-p_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Denna har de stationära sannolikheterna $\frac{E[X_i]}{E[X]}$.

Uppgift 6

Se lösningen till uppgift 10.31 i boken (kallad 10.30 i lösningen). Det sista uttryycket i lösningen kan förenklas till:

$$\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^2}.$$