STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MS 2210
TENTAMEN
18 februari 2013

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II

18 februari 2013 kl. 9–14

Examinator: Thomas Höglund, hoglund@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Utdelad formelsamling.
Återlämning: Tisdag 26/2 2013 kl 14.00 i rum 321, hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är 10 poäng på teoridelen och 20 poäng på problemdelen. Resonemang skall vara klara och tydliga och lätta att följa.

Här är ett par formler av vilka någon kanske kan komma till användning. Med sedvanliga beteckningar gäller:

M/M/1-kö: $W = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$, $L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$

M/G/1-kö: $W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}$

Teoridel: Uppgift 1

Vad menas med

a) En förnyelseprocess? (3 p)

b) Ålder och excess hos en förnyelseprocess? (3 p)

c) En sammansatt förnyelseprocess? (4 p)

Teoridel: Uppgift 2

Vi ska uppskatta integralen $I = \int_0^{1/4} g(x)dx$ med hjälp av stokastisk simulering. Här är $g(x) = 1/\sin(\sqrt{x})$.

Som ett första försök kan man betrakta skattningen

$$\hat{I} = (g(U_1) + ... + g(U_n))/(4n),$$

där $U_1, U_2, ..., U_n$ är en följd av oberoende slumptal som alla är likformigt fördelade på intervallet $(0, 1/4)$. Denna skattning har emellertid oändlig varians.

Följande uppgifter kan lösas oberoende av varandra.

a) Visa att ovanstående skattning har oändlig varians. Det räcker att du behandlar fallet $n = 1$.(Här kan du få användning av olikheten $\sin t < t$ för alla $t > 0$. Denna får användas utan bevis.) (2 p)

b) Antag att du istället har tillgång till oberoende slumptal, $X_1, ..., X_n$, som alla är från fördelningen som ges av täthetsfunktionen $f(x) = x^{-1/2}$ för $0 < x < 1/4$. Beskriv hur man ska välja $h(x)$ för att $(h(X_1)+...+h(X_n))/n$ ska bli en väntevärdesriktig skattning av I. Väntevärdesriktigheten ska visas. (3 p)

c) Antag att du har tillgång till slumptal U som är likformigt fördelade på intervallet $(0, 1)$. Beskriv hur du kan konstruera slumptal, X, med samma fördelning som i (b). (3 p)

d) Låt $h(X_1)$ vara som i (b). Visa att

$$\text{Var}(h(X_1)) \leq 0.043^2.$$

Här kan du få användning av olikheten $1 \leq t/\sin t \leq 1.043$ för $0 < t \leq 1/2$. Denna behöver inte visas. (2 p)

Uppgift 3

Trasiga maskiner anländer enligt en Poissonprocess med intensiteten 0.5 per timme till en verkstad som har en reparatör. Maskiner som anländer medan reparatören är upptagen med en annan maskin ställs i kö. Den totala servicetiden för en maskin kan delas upp i två delar: den tid, X, det tar att fastställa vilket felet är och den tid, Y, det tar att åtgärda felet. Här är X exponentialfördeld med väntevärde 1/2 timme och Y är likformigt fördelad mellan 0 och 2 timmar. Vidare är X och Y oberoende.

a) Bestäm den genomsnittliga kötiden för en maskin. (5 p)

b) Bestäm hur många maskiner som i genomsnitt befinner sig i verkstaden. (5 p)

Uppgift 4

Den tid det tar att sortera ett brev vid en postcentral är summan av två tider: X och Y. Här är X tiden det tar att väga brevet och kontrollera portot medan Y är tiden det tar att sortera brevet efter adressat. I bägge fallen är tiden mätt i sekunder. Det är känt att dessa variabler är oberoende och att X är likformigt fördelad på intervallet $(2, 6)$ medan Y är lokformigt fördelad på intervallet $(1, 3)$. Vidare är sorteringstiderna för olika brev oberoende.

a) Ange approximativt väntevärdet för hur många brev en person hinner sortera på en timme. (5 p)

b) Hur stor är sannolikheten (approximativt) att en person hinner med fler än 590 brev under en timme? (5 p)

Uppgift 5

En process med tillståndsrummet $\{1, 2, 3\}$ byter tillstånd enligt en Markovkedja med övergångsmatris

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uppehållstiderna i tillstånd 1 är exponentialfördelade med väntevärde 2 minuter, de i tillstånd 2 är likformigt fördelade mellan 0 och 1 minuter och de i tillstånd 3 är exponentialfördelade med väntevärde 1 minut. Hur stor andel av tiden tillbringas i tillstånd 3? (10 p)

Uppgift 6

En Ornstein Uhlenbeck-process $X(t) = e^{-t/2}B(e^t)$,, $t \geq 0$, är given, där $\{B(t), t \geq 0\}$ är en standard Brownsk rörelse. Man observerar $\{X(t), t \geq 0\}$ vid diskreta tidpunkter $0, \Delta t, 2\Delta t, ...$, d.v.s. man observerar

$$X_n = X(n\Delta t), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

a) Bestäm λ, $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, så att

$$X_n = \lambda X_{n-1} + Z_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

där $-1 < \lambda < 1$ och $\{Z_n\}$ är oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Bestäm även denna fördelning och motivera oberoendet. (6 p)

b) Beräkna prediktorn $\hat{X}_n = E(X_n|X_{n-1})$ av X_n. (2 p)

c) Hur litet måste Δt göras för att ett 95% prediktionsintervall av X_n givet X_{n-1} högst får ha längden 0.1? (Ett sådant intervall har formen $(\hat{X}_n - 1.96\sqrt{\mathrm{Var}(X_n|X_{n-1})}, \hat{X}_n + 1.96\sqrt{\mathrm{Var}(X_n|X_{n-1})})$.) (2 p)

Lycka till!