Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 10 augusti 2022

1. (a) Vi börjar med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 15 &= 1 \cdot 13 + 2 \\ 13 &= 6 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

så $\mathrm{SGD}(15, 13) = 1$ och vi kan lösa hjälpekvationen $17x + 10y = 1$ genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 13 - 6 \cdot 2 = 13 - 6 \cdot (15 - 1 \cdot 13) = 15 \cdot (-6) + 13 \cdot 7$. Vi får att $(x, y) = (-6, 7)$ är en partikulärlösning till hjälpekvationen. Multipliceras denna med 11 fås en partikulärlösning till vår ekvation, så den allmänna lösningen ges därmed av

$$\begin{cases} x = -66 + 13k \\ y = 77 - 15k \end{cases}$$

för $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Insättning av lösningen ger $x - y = -143 + 28k$. Vi behöver alltså hitta den rest av 143 modulo 28 som ligger närmast 0 på tallinjen, vilket är 3 och som fås för för $k = 5$. Vi finner alltså det minsta värdet $|x - y| = 3$ för $(x, y) = (-1, 2)$.

(c) Ekvationen har lösningar om och endast om $\mathrm{SGD}(15, p) \mid 11$. Eftersom $15 = 3 \cdot 5$ är $\mathrm{SGD}(15,p) = \begin{cases} 3 & \text{om } p = 3, \\ 5 & \text{om } p = 5, \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$ så ekvationen är lösbar för alla primtal p utom 3 och 5.

2. (a) Vi har primtalsfaktoriseringen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Det är uppenbart att $2^{122} + 6$ delas av 2 (båda termerna är jämna) men inte av 3 (bara ena termen är delbar med 3). Modulo 5 får vi

$$2^{122} + 6 = 4^{61} + 1 \equiv (-1)^{61} + 3 = -1 + 1 = 0 \pmod 5$$

så talet är delbart med 5. Alltså är $\mathrm{SGD}(2^{122} + 6, 30) = 2 \cdot 5 = 10$.

(b) Eftersom $Y \setminus X \subseteq \{5\}$ får vi två fall. Första fallet är att $Y \setminus X = \emptyset$. Då $Y \subseteq X$, så $X = X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och då måste $Y = \{2, 4, 5\}$.

Det andra fallet är att $Y \setminus X = \{5\}$. Då ligger alltså elementen 1, 3 och 5 i precis en av mängderna, medan 2 och 4 måste ligga i båda, därmed är $X = \{1, 2, 3, 4\}$ och $Y = \{2, 4, 5\}$.

3. Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter så även konjugatet $x = -2 - i$ är en rot, så polynomet delas av $(z - (-2 + i))(z - (-2 - i)) = z^2 + 4z + 5$. Polynomdivision ger $p(z) = (z^2 + 4z + 5)(z^3 + 8)$. Vi behöver lösa ekvationen $z^3 + 8 = 0$. Ansätter vi lösningen på polär form $z = re^{\theta i}$ fås $r^3 e^{3\theta i} = 8e^{\pi i}$. Vi behöver alltså $r^3 = 8$ och $3\theta = \pi + 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$, vilket ger $r = 2$ och $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} n$. Sätter vi in $n = 1, 2, 3$ fås 3 lösningar.
Svar: $z_{1,2} = -2 \pm i$, $z_3 = -2$, $z_{4,5} = 1 \pm \sqrt{3}\, i$.

4. Vi måste undersöka antalet lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = -1 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$.

Koefficientmatrisens determinant är, efter lite kalkyler, $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2)$. För $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ är determinanten nollskild, så ekvationssystemet har unik lösning och planen skär alltså varandra i precis en punkt. I fallet $a = 1$ kommer första och andra ekvationen att vara motstridiga så planen har ingen gemensam punkt. I fallet $a - 2$ får man efter Gausseliminering trappstegsformen $\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ y - z = 1/3 \end{cases}$ så det finns oändligt många skärningspunkter.

5. (a) Om vi kallar punkterna $P = (1, 0, -1)$ och $Q = (1, 2, -3)$ får vi $\overrightarrow{PQ} = (0, 2, -2)$. Den givna linjen har en riktningsvektor $\vec{v} = (1, -1, -1)$, så en normalvektor till planet är

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vec{e}_1 \\ 2 & -1 & \vec{e}_2 \\ -2 & -1 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = -4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (-4, -2, -2).$$

Planets ekvationen är därför $-4(x-1) - 2(y-0) - 2(z+1) = 0$, dvs $2x + y + z = 1$.

(b) Om vi parametriserer normallinjen till planet genom den givna punkten får vi $(x, y, z) = (7 + 2t, t, 5 + t)$. Stoppar vi in detta planets ekvation får vi $2(7 + 2t) + t + (5 + t) = 1$, med lösningen $t = -3$. Detta ger att den närmaste punkten är $(x, y, z) = (1, -3, 2)$.

6. (a) Om $\vec{u} = (x, y, z)$ får vi

$$\vec{e}_1 \times \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & x & \vec{e}_1 \\ 0 & y & \vec{e}_2 \\ 0 & z & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = 0\,\vec{e}_1 - z\,\vec{e}_2 + y\,\vec{e}_3 = (0, -z, y),$$

så

$$F(\vec{u}) = \vec{u} + (\vec{e}_1 \times \vec{u}) = (x, y, z) + (0, -z, y) = (x, y - z, z + y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

så avbildningens matris är $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Med hjälp av lämpliga radoperationer får vi

$$\begin{pmatrix} A \mid E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E \mid A^{-1} \end{pmatrix}$$

vilket både visar att F är inverterbar, och att inversa avbildningens matris är

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$