STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM4001 Matematik för naturvetenskaper II
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-08-11

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(5 p.)** Finn alla lösningar till den diofantiska ekvationen
$$91x + 23y = 5000.$$

2. **(2+2 p.)**
(a) Beräkna vilken månad det är om $11^5 + 12^4$ månader. (Påminnelse: i dag är det augusti.)
(b) Hur många olika bokstavsföljder kan bildas av ADDITION?

3. **(5 p.)** Bevisa med induktion att
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$
gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$, dvs. för alla positiva heltal.

4. **(3+3 p.)** (a) Skissa området D_1 i planets första kvadrant som begränsas av $x = 0$, $y = 0$ samt $y = 1 - x^2$ och beräkna dubbelintegralen
$$\iint_{D_1} x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
(b) Beräkna $\iint_{D_2} \cos \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där D_2 begränsas av cirklarna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y^2 = 3$.

5. **(5 p.)** Med avseende på en ON-bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, låt P beteckna den ortogonala projektionen på planet $x + y + z = 0$ i rummet. Dessutom låt T vara den linjära avbildningen som uppfyller
$$T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad T(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3.$$
Visa, att T är inverterbar och att P inte är inverterbar, och beräkna matrisen till den sammansatta avbildningen $T^{-1} \circ P$.

6. **(2+3 p.)** För varje värde på det reella talet a har vi givet funktionen
$$f_a(x, y) = 1 + x + ay + x^{13} + y^2.$$
(a) Bestäm en normalvektor till tangentplanet till grafen $z = f_a(x, y)$ för $x = 0, y = 0$.
(b) För varje värde på det reella talet b betrakta planet $x = y - bz$. Detta skär planet $x = 2y - 2z$ i en linje L_b. För vilka a och b gäller det att tangentplanet till f_a i $(x, y) = (0, 0)$ är vinkelrätt mot linjen L_b?

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!