STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM4001 Matematik för naturvetenskaper II
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-08-11

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(5 p.)** Finn alla lösningar till den diofantiska ekvationen

$$91x + 23y = 5000.$$

Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 91 &= 3 \cdot 23 + 22, \\ 23 &= 1 \cdot 22 + 1, \\ 22 &= 22 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Därför är SGD $(91, 23) = 1$, vilket delar högerledet 5000, och det finns därmed lösningar. Vi löser ut resterna,

$$\begin{aligned} 1 &= 23 - 1 \cdot 22, \\ 22 &= 91 - 3 \cdot 23, \end{aligned}$$

och får

$$1 = 23 - 1(91 - 3 \cdot 23) = -1 \cdot 91 + 4 \cdot 23.$$

Alltså löser $(-1, 4)$ hjälpekvationen $91x + 23y = 1$. Därför är

$$(x_0, y_0) = (-5000, 20000)$$

en lösning till den ursprungliga ekvationen. Den allmänna lösningen ges då av

$$\begin{cases} x &= -5000 - 23n, \\ y &= 20000 + 91n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

2. **(2+2 p.)**

(a) Beräkna vilken månad det är om $11^5 + 12^4$ månader.

(b) Hur många olika bokstavsföljder kan bildas av ADDITION?

Lösning: (a) Vi räknar modulo 12 och använder oss av räknereglerna för moduliräkning:

$$11^5 + 12^4 = (-1)^5 + 0^4 = -1 = 11 \mod 12.$$

Nu är det augusti, om $11^5 + 12^4$ månader är det alltså juli.

(b) Det handlar om arrangemang av (inte nödvändigtvis lika) objekt. Ordet ADDITION innehåller 8 bokstaver av vilka två dyker upp två gånger, D och I. Därför finns det

$$\frac{8!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 (= 10080)$$

olika bokstavsföljder som kan bildas av ADDITION.

3. **(5 p.)** Bevisa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$, dvs. för alla positiva heltal.

Lösning: Induktionsbas: För $n = 1$ har vi

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2$$

och

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3 = 1,$$

de två uttrycken är alltså lika varandra.

Induktionsantagande: För något positivt heltal n gäller det att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Induktionssteg: Vi vill visa att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1). \tag{1}$$

Faktiskt har vi enligt induktionsantagandet

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\Big(\frac{1}{6}n(2n+1) + n + 1\Big) = \frac{1}{6}(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3),\end{aligned}$$

och detta är exakt högerledet i (1).

4. **(3+3 p.)** (a) Skissa området D_1 i planets första kvadrant som begränsas av $x = 0$, $y = 0$ samt $y = 1 - x^2$ och beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{D_1} x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(b) Beräkna $\iint_{D_2} \cos\sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där D_2 begränsas av cirklarna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y^2 = 3$.

Lösning: (a) Vi ska beräkna

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{1-x^2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 [xy]_{y=0}^{1-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x \\ &= \Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(b) I polära koordinater får vi

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{3}} r\cos r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_1^{\sqrt{3}} r\cos r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left([r\sin r]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \sin r\,\mathrm{d}r\right) \\
&= 2\pi\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3} - \sin 1 + [-\cos r]_1^{\sqrt{3}}\right) \\
&= 2\pi\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3} - \sin 1 - \cos\sqrt{3} + \cos 1\right),
\end{aligned}$$

där vi har integrerat partiellt.

5. **(5 p.)** Med avseende på en ON-bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, låt P beteckna den ortogonala projektionen på planet $x+y+z=0$ i rummet. Dessutom låt T vara den linjära avbildningen som uppfyller

$$T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \quad T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \quad T(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3.$$

Visa, att T är inverterbar och att P inte är inverterbar, och beräkna matrisen till den sammansatta avbildningen $T^{-1}\circ P$.

Lösning: Vi börjar med att beräkna matrisframställningen M av T. Betecknar vi kolonnerna av M som m_1, m_2, m_3 så får vi

$$m_1+m_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad m_1+m_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad m_2+m_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

eller med andra ord

$$M\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Med hjälp av Gausseliminering får man

$$M = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Särskilt gäller det $M = 1 \neq 0$, därför är M - och sedan T - inverterbar.

Den ortogonala projektionen P beräknas formelenligt,

$$P(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle(1,1,1),(x,y,z)\rangle}{\langle(1,1,1),(1,1,1)\rangle}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-z\\-x+2y-z\\-x-y+2z\end{pmatrix}.$$

Matrisframställningen N till P är alltså

$$N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

P är inte inverterbar, då $\det N = 1/3(8-1-1-2-2-2) = 0$.

Matrisframställningen till $T^{-1} \circ P$ är lika med

$$\begin{aligned} M^{-1}N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. **(2+3 p.)** För varje värde på det reella talet a har vi givet funktionen

$$f_a(x,y) = 1 + x + ay + x^{13} + y^2.$$

(a) Bestäm en normalvektor till tangentplanet till grafen $z = f_a(x,y)$ för $x = 0, y = 0$.

(b) För varje värde på det reella talet b betrakta planet $x = y - bz$. Detta skär planet $x = 2y - 2z$ i en linje L_b. För vilka a och b gäller det att tangentplanet till f_a i $(x,y) = (0,0)$ är vinkelrätt mot linjen L_b?

Lösning: (a) Vi har

$$\frac{\partial f_a}{\partial x}(x,y) = 1 + 13x^{12}, \qquad \frac{\partial f_a}{\partial y}(x,y) = a + 2y.$$

Alltså uppfyller tangentplanet i $(x_0, y_0) = (0,0)$ ekvationen

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) \\ &= 1 + x_0 + ay_0 + x_0^{13} + y_0^2 + (1 + 13x_0^2)(x - x_0) + (a + 2y_0)(y - y_0) \\ &= 1 + x + ay. \end{aligned}$$

En normalvektor till tangentplanet i $(x_0, y_0) = (0,0)$ ges alltså av

$$\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Skärningen L_b mellan de två planen kan beräknas genom att lösa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -b \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0},$$

och Gausseliminering ger

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -b \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & b-2 \end{pmatrix}.$$

Vi väljer $t = z$ godtyckligt och får $y = (2-b)t$, $x = y - bt = (2-2b)t$, därför

$$L_b : t \begin{pmatrix} 2-2b \\ 2-b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tangentplanet till f_a i $(0,0)$ är vinkelrätt mot L_b, om och endast om $\vec{n}_a$ är parallell till riktningsvektorn av L_b, alltså

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2-2b \\ 2-b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den tredje ekvationen ger $\lambda = -1$, och de första två är då $1 = 2b - 2$ samt $a = b - 2$. Detta linjära ekvationssystem löses av $b = 3/2, a = -1/2$.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!