Taras Bodnar
Department of Mathematics
Stockholm University
E-Mail: taras.bodnar@math.su.se

Theory of Statistical Inference

Exam, 2021/12/3

The only allowed aid is a pocket calculator provided by the department. The answers to the tasks should be clearly formulated and structured. All non-trivial steps need to be commented. The solutions should be given in English or Swedish.

The written exam (home exam) is divided into two parts. The first part considers the most central of the course concepts and it is related to standard problems. The second part consists of problems that requires a higher level of understanding, the ability to generalize and to combine methods. Each part consists of three problems and will worth a maximum of 50 points. In order to receive grades A-E, a minimum of 35 points is required in the first part. The second part is only graded for students passing the first part. Given a minimum of 35 points in the first part, the final grade is determined by the sum of regular points in both parts of the exam and bonus points according to the following table:

Grade	A	B	C	D	E	F
Points	100-90]	(90-80]	(79-70]	(69-60]	< 60 and ≥ 35 in Part I	< 35 in Part I

Up to 10 bonus points (i.e., in addition to the ordinary 100 points) are given for the active participation in the problem sessions. A half of the bonus points will be used for the first part of the exam, while the second half of the bonus points will be used in the second part of the exam.

Part I:

Problem 1 [23P]

Let $X_{1:n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ be an iid. sample of a normally distributed random variable X whose density is given by

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{for} \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \sigma > 0,$$

with known mean $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Derive the expression of the log-likelihood function for σ. **[3P]**

(b) Calculate the score vector $S_{1:n}(\sigma)$. **[4P]**

(c) Find the ordinary Fisher information $I_{1:n}(\sigma)$, the observed Fisher information $I_{1:n}(\hat{\sigma}_{ML})$, and the expected Fisher information $J_{1:n}(\sigma)$. **[9P]**

(d) Derive the maximum likelihood estimator $\hat{\sigma}_{ML}$ for σ. **[3P]**

(e) Find a minimal sufficient statistic for σ and explain your answer. **[4P]**

Problem 2 [17P]

Let $X_{1:n} = (X_1, ..., X_n)^T$ denote a random sample from a negative binomial distribution with probability mass function of X_i given by

$$\mathbb{P}(X_i = x; \pi) = \frac{(x+k-1)!}{x!(k-1)!}\pi^k(1-\pi)^x \quad \text{for} \quad \pi \in (0,1), k > 0 \quad \text{and} \quad x = 0, 1, 2, ...,$$

It also holds that $\mathbb{E}(X_i) = k(1-\pi)\pi^{-1}$ and $\mathbb{V}ar(X_i) = k(1-\pi)\pi^{-2}$.

(a) Show that the conjugate prior for π is a beta distribution with density function given by

$$f(\pi) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}\pi^{\alpha-1}(1-\pi)^{\beta-1} \quad \text{for} \quad \pi \in (0,1) \quad \text{and} \quad \alpha, \beta > 0$$

and prior mean $\mathbb{E}(\pi) = \alpha(\alpha+\beta)^{-1}$. Determine the parameters in the corresponding posterior distribution. **[5P]**

(b) Compute the posterior mean of π when the conjugate prior is used. **[2P]**

(c) Find the expression of the Jeffreys prior for π and compute the corresponding posterior distribution. **[6P]**

(d) Calculate the posterior mean when the Jeffreys prior is used and compare it to the expression of the MLE estimator for π obtained in the frequentist statistics. **[4P]**

Problem 3 [10P]

Provide the definition of the expected Fisher information in the case of a scalar parameter. Derive the expectation and the variance of the score function in the case of a scalar parameter.

Part II:

Problem 4 [15P]

Let $\boldsymbol{X}_{1:n} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n)$ be an independent sample from a multivariate 3-dimensional normal distribution with density function of $\boldsymbol{X}_i = (X_{1,i}, X_{2,i}, X_{3,i})^\top$ given by

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}) = (2\pi)^{-3/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right), \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^\top \in \mathbb{R}^3,$$

with known covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,...,3}$. The notation $|\boldsymbol{\Sigma}|$ stands for the determinant of matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ and $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top$ denotes the transpose of $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$. The aim is to test the null hypothesis:

$$H_0 : \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3. \tag{1}$$

(a) Formulate the alternative hypothesis H_1. **[1P]**

(b) Derive the generalized likelihood ratio statistic for testing H_0 in (2). **[12P]**

(c) Determine the distribution of the test statistics derived in part (b). **[2P]**

Problem 5 [20P]

Suppose that X has a Zero Inflated Geometric (ZIG) distribution with probability mass function given by

$$f(0) = p + (1-p)\eta \quad \text{and} \quad f(x) = (1-p)\eta(1-\eta)^x \qquad \text{for} \qquad x = 1, 2, ... \quad ,$$

where $p, \eta \in (0, 1)$.

(a) Reparameterize the ZIG distribution in terms of the new parameters **[2P]**

$$\pi = p + (1-p)\eta \quad \text{and} \quad \beta = \eta.$$

(b) In the rest of the problem, assume that an iid sample $X_{1:n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ is available from the ZIG distribution whose realizations are denoted by $x_{1:n} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ where $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ and $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n > 0$. Construct the log-likelihood function for $\boldsymbol{\theta} = (\pi, \beta)^\top$. **[3P]**

(c) Find the maximum likelihood estimator $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = (\hat{\pi}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})^\top$ of $\boldsymbol{\theta}$.**[4P]**

(d) Derive the observed Fisher information matrix $\mathbf{I}_{1:n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})$. **[4P]**

(e) Construct an asymptotic 90% two-sided confidence interval for π and an asymptotic 90% two-sided confidence interval for β. **[4P]**

(f) Are the estimators $\hat{\pi}_{ML}$ and $\hat{\beta}_{ML}$ asymptotic independent? Explain your answer. **[2P]**

(g) Specify the maximum likelihood estimator of the original model parameters p and η.**[1P]**

Problem 6 [15P]

Provide the definition of the generalised likelihood ratio statistic and derive its asymptotic distribution.

Taras Bodnar
Department of Mathematics
Stockholm University
E-Mail: taras.bodnar@math.su.se

Statistisk inferensteori

Tentamen, 2021/12/03

Det enda tillåtna hjälpmedlet är en miniräknare som tillhandahålls av institutionen. Lösningarna på uppgifterna skall vara välstrukturerade och tydligt redovisade. Alla icke-triviala steg skall motiveras. Lösningarna får endast vara skrivna på engelska eller svenska.

Den här tentamen är skriftlig och är indelad i två delar. Den första delen fokuserar på de mest centrala delarna av kursen och består av standardproblem. Den andra delen består av problem som kräver en djupare förståelse, samt förmågan att generalisera och kombinera metoder. De två delarna består var och en av tre frågor och kan som mest ge 50 poäng. Totalt kan de två delarna alltså som mest ge 100 poäng. För att uppnå betygen A-E krävs minst 35 poäng på den första delen. Den andra delen rättas enbart om 35 poäng uppnåtts på den första delen, och betyget ges då av summan av antalet poäng på de två delarna enligt:

Betyg	A	B	C	D	E	F
Poäng	[100-90]	(90-80]	(79-70]	(69-60]	<60 och ≥ 35 i Del I	<35 i Del I

Bonusuppgifterna kan totalt bidra med upp till 10 poäng. Hälften av de uppnådda bonuspoängen adderas till poängen för del I, och den andra hälften adderas till poängen för del II.

Del I:

Problem 1 [23P]

Låt $X_{1:n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ vara ett slumpmässigt stickprov (dvs. $X_1, X_2, ..., X_n$ är oberoende och likafördelade) från en normalfördelning med täthetsfunktion

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{för} \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad \sigma > 0,$$

och känt väntevärde $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Hitta log-likelihood-funktionen för σ. **[3P]**

(b) Bestäm scorevektorn $S_{1:n}(\sigma)$. **[4P]**

(c) Bestäm Fisherinformationen $I_{1:n}(\sigma)$, den observerade Fisherinformationen $I_{1:n}(\hat{\sigma}_{ML})$, och den förväntade Fisherinformationen $J_{1:n}(\sigma)$. **[9P]**

(d) Hitta maximum-likelihood-skattaren $\hat{\sigma}_{ML}$ av σ. **[3P]**

(e) Ange en minimalt tillräcklig statistika för σ och motivera ditt svar. **[4P]**

Problem 2 [17P]

Låt $X_{1:n} = (X_1, ..., X_n)^T$ vara ett slumpmässigt stickprov från en negativ binomialfördelning, d.v.s. X_i har sannolikhetsfunktion

$$\mathbb{P}(X_i = x; \pi) = \frac{(x+k-1)!}{x!(k-1)!}\pi^k(1-\pi)^x \quad \text{för} \quad \pi \in (0,1), k > 0 \quad \text{och} \quad x = 0, 1, 2, ...,$$

Då gäller det att $\mathbb{E}(X_i) = k(1-\pi)\pi^{-1}$ och $\mathbb{V}ar(X_i) = k(1-\pi)\pi^{-2}$.

(a) Visa att den konjugerande apriorifördelningen för π ges av betafördelningen och bestäm den motsvarande aposteriorifördelningens parametrar. Du kan använda att om π är betafördelad med shape-parameter $\alpha > 0$ och rate-parameter $\beta > 0$ så har π täthet

$$f(\pi) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}\pi^{\alpha-1}(1-\pi)^{\beta-1} \quad \text{for} \quad \pi \in (0,1) \quad \text{and} \quad \alpha, \beta > 0$$

och väntevärde $\mathbb{E}(\pi) = \alpha(\alpha+\beta)^{-1}$. **[5P]**

(b) Hitta aposteriori-väntevärdet av π om den konjugerande apriorifördelningen används. **[2P]**

(c) Hitta Jeffrey's apriorifördelning för π och den motsvarande aposteriorifördelningen. **[6P]**

(d) Hitta aposteriori-väntevärdet av π om Jeffrey's apriorifördelningen används. Jämför ditt svar med den frekventistiska Maximum-likelihood-skattaren av λ. **[4P]**

Problem 3 [10P]

Ange definitionen av den förväntade Fisherinformationen av en endimensionell parameter. Härled väntevärdet och variansen av scorefunktionen för en endimensionell parameter.

Part II:

Problem 4 [15P]

Låt $\boldsymbol{X}_{1:n} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n)$ vara ett slumpmässigt stickprov från en multuvariat 3-dimensionell normalfördelning, d.v.s. täthetsfunktionen för $\boldsymbol{X}_i = (X_{1,i}, X_{2,i}, X_{3,i})^\top$ ges av

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}) = (2\pi)^{-3/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right), \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^\top \in \mathbb{R}^3,$$

där kovariansmatrisen $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,...,3}$ är känd. Här betecknar $|\boldsymbol{\Sigma}|$ determinanten av matrisen $\boldsymbol{\Sigma}$ och $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top$ betecknar transponatet av $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$. Målet med uppgiften är att testa nollhypotesen:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3. \tag{2}$$

(a) Ange alternativhypothesen H_1. **[1P]**

(b) Hitta den generaliserade likelihood-ratio-statistikan för testet av H_0 i (2). **[12P]**

(c) Bestäm fördelningen för teststatistikan i (b). **[2P]**

Problem 5 [20P]

Sannolikhetsfunktionen för så kallade ZIG-fördelningen (ZIG står för Zero Inflated Geometric) ges av

$$f(0) = p + (1-p)\eta \quad \text{och} \quad f(x) = (1-p)\eta(1-\eta)^x \qquad \text{för} \qquad x = 1, 2, ... \quad ,$$

där $p, \eta \in (0, 1)$.

(a) Omparametrisera ZIG-fördelningen till de nya parametrarna π och β, där **[2P]**

$$\pi = p + (1-p)\eta \quad \text{och} \quad \beta = \eta.$$

(b) I resten av Problem 5 antar vi att $X_{1:n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ är ett slumpmässigt stickprov från ZIG-fördelningen och att vi har tillgång till realisationen $x_{1:n} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ av $X_{1:n}$, där $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ och $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n > 0$. Bestäm log-likelihood-funktionen för $\boldsymbol{\theta} = (\pi, \beta)^\top$. **[3P]**

(c) Hitta maximum-likelihood-skattaren $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = (\hat{\pi}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})^\top$ av $\boldsymbol{\theta}$.**[4P]**

(d) Hitta Fishers observerade informationsmatris $\mathbf{I}_{1:n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})$. **[4P]**

(e) Konstruera ett asymptotiskt 90%-igt tvåsidigt konfidensinterval för π och ett asymptotiskt 90%-igt tvåsidigt konfidensintervall för β. **[4P]**

(f) Är skattarna $\hat{\pi}_{ML}$ och $\hat{\beta}_{ML}$ asymptotiskt oberoende? Motivera ditt svar. **[2P]**

(g) Bestäm maximum-likelihood-skattarna av de ursprungliga parametrarna p och η.**[1P]**

Problem 6 [15P]

Ange definitionen av den generaliserade likelihood-ratio-statistikan och härled dess asymptotiska fördelning.