SAMMANFATTNING FÖRELÄSNING 6

ALAN SOLA

Vi fortsatte med vår genomgång av teorin för kurvintegraler i planet. Vi började med kort repetition av begreppet *konservativt vektorfält*: vi säger att $\vec{F} = (P, Q)$ är konservativt i ett område D om det existerar en funktion $U \in C^1(D)$ sådan att $\mathrm{grad} U = \vec{F}$. Denna funktion U kallas för *en potential*: om U är en potential är även $U + C$ en potential för varje konstant.

Vi visade att om $\vec{F}$ har en potential i ett område D så gäller

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{b}) - U(\vec{a})$$

för varje C^1-kurva γ med startpunkt i $\vec{a}$ och slutpunkt i $\vec{b}$. Speciellt är kurvintegralen oberoende av vägen. I ett bågvis sammanhängande område D gäller även omvändningen: om $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje enkel sluten kurva (ett ekvivalent villkor för att $\vec{F}$ skall ha en potential) så är $\vec{F}$ konservativt. Exemplet $\vec{B} = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$ visar att inte alla vektorfält är konservativa: kurvintegralen av $\vec{B}$ runt varje cirkel med centrum i origo har värdet 2π, vilket kan beräknas medelst parametrisering.

I vissa fall kan en potential bestämmas explicit genom lösning av systemet $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ och $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Om U antas vara C^2 föreligger följande nödvändiga villkor för att U ska vara en potential: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Att detta villkor i allmänhet inte är tillräckligt illustreras av $\vec{B}$ ovan. Om D är en *enkelt sammanhängande mängd*, det vill säga att om D har ett sammanhängande komplement i $\mathbb{R}^2$, så blir villkoret $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ dock tillräckligt.

Department of Mathematics, Stockholm University, 106 91 Stockholm, Sweden.
Email address: sola@math.su.se