STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-12-19

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+4 p.)** (a) Bestäm derivatan till $f(x) = \ln \frac{x}{1+x^2}$; förenkla så långt som möjligt.

   (b) Betrakta funktionen $g(x) = xe^{\frac{x}{2}}$, där $0 < x < 1$. Beräkna volymen av den kropp, som uppstår, när grafen till g roteras runt x-axeln.

2. **(5 p.)** Bestäm alla $\alpha \in \mathbb{R}$, för vilka matrisen
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   är inverterbar. Använd dessutom Gauss-Jordan-elimination för att överföra M till trappstegsform. (Betrakta olika fall beroende på värdet på a, om det behövs.)

3. **(1+3 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:
$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^x}{2\cos x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x - \sqrt{x}}.$$

4. **(2+2+1 p.)** Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$.

   (a) Bestäm alla punkter, i vilka f antar ett lokalt minimum eller maximum.

   (b) Undersök var f är konvex resp. konkav.

   (c) Antar funktionen f ett globalt maximum?

5. **(1+3+1 p.)** Låt $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ vara en ON-bas i rummet.

   (a) Vilka koordinater har vektorn $5e_1 - e_3$ i basen $\mathbb{B}$?

   (b) Undersök huruvida uppsättningen av vektorer (f_1, f_2, f_3), där
$$f_1 = e_1 + 2e_3, \qquad f_2 = \frac{1}{2}e_1 + 2e_2 + 3e_3, \qquad f_3 = e_1 + e_2 + 3e_3,$$
   är linjärt oberoende.

   (c) Låt $\vec{u}_{\mathbb{B}} = (1, 4, 0)$ och $\vec{v}_{\mathbb{B}} = (1, 1, 2)$. Bestäm en vektor $\vec{w}$ som är ortogonal mot båda $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

6. **(5 p.)** Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$y'' - 7y' + 12y = \cos(3x).$$

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!