Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 18 januari 2023

1. (a) Förlänger vi med konjugatuttrycket får vi

$$\sqrt{n^2+an+b}-n = \frac{(n^2+an+b)-n^2}{\sqrt{n^2+an+b}+n}$$
$$= \frac{a+b/n}{\sqrt{1+a/n+b/n^2}+1} \to \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$$

då $n \to \infty$.

(b) Med standardutvecklingarna $e^t = 1+t++O(t^2)$, $\cos(t) = 1-t^2/2!+O(t^3)$ och $\ln(1+t) = t+O(t^2)$ då $t \to 0$ får vi

$$\frac{e^{x^2}-\cos(2x)}{x\ln(1+4x)} = \frac{(1+x^2+O(x^4))-(1-2x^2+O(x^3))}{x(4x+O(x^2))}$$
$$= \frac{3x^2+O(x^3)}{4x^2+O(x^3)} = \frac{3+O(x)}{4+O(x)} \to \frac{3}{4}$$

då $x \to 0$.

2. Vi har att $f(x)$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så de enda möjliga asymptoterna är sneda. Vi får att

$$\lim_{x\to\infty} x^4e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0,$$

så $y = 0$ är en asymptot då $x \to \infty$. Åt andra hållet får vi dock

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3e^{-x} = [t=-x] = \lim_{t\to\infty} -t^3e^t = -\infty,$$

så asymptot saknas då $x \to -\infty$.

Vi får vidare, efter förenkling, att

$$f'(x) = x^2(4-x)e^{-x}, \qquad f''(x) = x^2(x-2)(x-6)e^{-x},$$

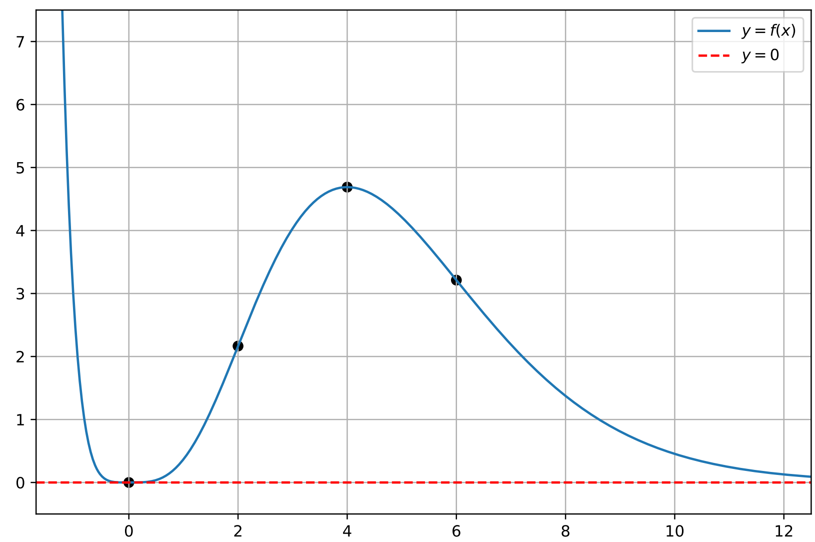
så $f'(x) = 0$ för $x = 0$ och för $x = 4$, och $f''(x) = 0$ för $x = 0$, $x = 2$ och då $x = 6$. Vi gör en teckentabell

x		0		2		4		6	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{256}{e^4}$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	infl.	$\frown$	$\frown$	$\frown$	infl.	$\smile$

Från teckentabellen ser vi att funktionen har två lokala extremvärde, ett lokalt maximum vid $x = 4$, och ett lokalt minimum vid $x = 0$ som även är globalt minimum. Globalt maximum saknas eftersom funktionen är obegränsad.

Vidare har vi 2 inflektionspunkter, och funktionen är konvex på intervallen $]-\infty, 2]$ och $[4, \infty[$, samt konkav på $[2, 6]$.

Vi har nu tillräcklig information för att kunna rita en skiss av grafen:



3. Låt h vara längden av kateten som triangeln roterar kring, och r längden av den andra kateten. Då är r bottenytans radie, och h konens höjd. Därmed är bottenarean $A = \pi r^2$, så $V = \pi r^2 h/3$. Eftersom $r^2 + h^2 = a^2$ är $r^2 = a^2 - h^2$, så vi får
$$V(h) = \pi(a^2 - h^2)h/3 = \frac{\pi}{3}(a^2 h - h^3), \qquad 0 \leq h \leq a,$$
om vi tillåter de degenererade fallen $h = 0$ och $r = 0$. Vi får nu att $V'(h) = \frac{\pi}{3}(a^2 - 3h^2)$, så $V'(h) = 0$ bara då $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (eftersom $h \geq 0$). Eftersom funktionen är kontinuerlig och deriverbar på intervallet $[0, a]$, måste maximum finnas och antas i en stationär punkt eller en ändpunkt.

Eftersom $V(0) = V(a) = 0$, måste maximum antas i den stationära punkten, och vi får alltså att $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ och $r = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.

4. I polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ motsvaras området av
$$E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$
i $r\theta$-planet. Vi får
$$\iint_D x^2 \ln(x^2+y^2)\, dxdy = \iint_E (r\cos\theta)^2 \ln(r^2) r\, dr d\theta = \int_0^\pi \cos^2(\theta)\, d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 \ln(r^2)\, dr$$
$$= \int_0^\pi \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 \ln(r^2)\, dr = \left[u = r^2, r\, dr = \frac{du}{2}\right]$$
$$= \left[\frac{2\theta + \sin(2\theta)}{4}\right]_0^\pi \int_1^2 \frac{u}{2} \ln(u)\, du = \frac{\pi}{4} \int_1^2 u \ln(u)\, du = [P.I.]$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\left[\frac{u^2}{2}\ln(u)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{u^2}{2}\frac{1}{u}\, du\right) = \frac{\pi}{16}(8\ln(2) - 3).$$

5. Funktionen $f(x, y) = xye^{-x-y}$ är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = y(1-x)e^{-x-y} \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)e^{-x-y} \end{cases}$$

   Från den första ekvation får vi att $y = 0$ eller $x = 1$. I det första fallet ger andra ekvationen punkten $(x, y) = (0, 0)$ och i det andra fallet att $(x, y) = 1, 1$. Bara den senare är en inre punkt till området.

   Området är triangeln men hörnen $(0, 0)$, $(4, 0)$ och $(0, 4)$. Längs kanterna $x = 0$, resp $y = 0$ får vi det konstanta värdet $f(x, y) = 0$.

   Återstår kanten $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \end{cases}$, $0 < t < 4$. Vi får $h(t) = f(t, 4 - t) = t(4 - t)e^{-4}$.
   Detta ger $h'(t) = (4 - 2t)e^{-4}$, så $h'(t) = 0$ om och endast om $t = 2$ vilket ger kandidatpunkten $(2, 2)$.

   Triangelns hörn är redan undersökta, där antar funktionen värdet 0. Jämför vi nu funktionsvärdena 0, $f(1, 1) = e^{\cdot 2}$, och $f(2, 2) = 4e^{-4}$ får vi att funktionens maximum är $f(1, 1) = e^{-2}$.

6. (a) Vi skriver om den linjära differentialekvationen som $y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, och får den integrerande faktorn $e^{\ln(1+x^2)/2} = \sqrt{1+x^2}$. Multipliceras ekvationen med denna faktor fås

$$\left(y\sqrt{1+x^2}\right)' = x.$$

   Integreras båda sidor för vi $y\sqrt{1+x^2} = \frac{x^2}{2} + C$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger nu att $C = 1$, så $y(x) = \frac{x^2+2}{2\sqrt{x^2+1}}$.

   (b) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' - 4y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 4 = 0$, med lösningar $r = \pm 2$, så $y_h = Aa^{2x} + Be^{-2x}$, för $A, B \in \mathbb{R}$.
   Eftersom ekvationen är linjär kan vi få en partikulärlösning $y_p = y_1 + u_2$, där $y_1'' - 4y_1 = 8x^2$ resp. $y_2'' - 4y_2 = -e^x$
   Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_1 = ax^2 + bx + c$, så $y_p'' = 2a$ så vi får $y_1'' + 4y_1 = -4ax^2 - 4bx + (2a - 4c)$ vilket skall vara lika med $8x^2$, vilket betyder att $a = -2$, $b = 0$ och $c = -1$ så $y_1 = -2x^2 - 1$.
   Ansatsen $y_2 = de^x$ ger på samma sätt att $d = 1/3$, så $y_2 = \frac{e^x}{3}$
   Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y = y_p + y_h = \frac{e^x}{3} - 2x^2 - 1 + Aa^{2x} + Be^{-2x}.$$