



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Att approximera oändliga serier

av

Mimmi Hällberg

2018 - No K11

Att approximera oändliga serier

Mimmi Hällberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2018

Att approximera oändliga serier

Mimmi Hällberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, Grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2018

Abstract

Being able to approximate infinite series have been of great importance for the development of calculation. In this essay we will work towards an efficient way of approximating infinite series numerically with good accuracy. We will introduce and define the Bernoulli polynomials that will have a large part in our work, and it will all result in a proof of the Euler-Maclaurin formula, that is partly named after one of the greatest mathematicians in history Leonhard Euler.

Acknowledgement

A special thank you to my supervisor Torbjörn Tambour.

Innehåll

1	Inledning	2
1.1	Historia	2
2	Approximation av oändliga serier	4
2.1	Enskilt fall	4
2.2	Effektiv metod	5
3	Bernoullipolynom och Bernoullital	6
3.1	Definition av Bernoullipolynomen	6
3.2	Bernoullital	8
3.3	Egenskaper hos Bernoullipolynomen och Bernoullitalen	11
4	Approximation av oändliga serier - Fortsättning	26
4.1	Effektiv metod - Fortsättning	26
4.2	Euler-Maclaurins summationsformel	30
4.3	Approximering med Euler-Maclaurins summationsformel . . .	37
4.4	Slutsats	45
5	Referenslista	46

1 Inledning

I denna uppsats kommer vi att arbeta oss fram till ett effektivt sätt att approximerar oändliga serier numeriskt med god noggrannhet. Vi kommer att introducera och definiera Bernoullipolynomen och dess egenskaper, vilka kommer vara av stor betydelse i vårt arbete mot en formel för detta.

Vi har utgått från Lars Hörmanders kapitel *Euler-Maclaurins summationsformel och Bernoulliska polynom* sida 146-150 i boken *Välj specialarbete i matematik: idéer till specialarbeten i matematik för gymnasister: samlade som en del av FRN-projektet Information om högskolan i gymnasiet* av redaktör Dan Laksov, om inga andra källor angivs.

1.1 Historia

Genom historien har en stor drivkraft till att utveckla kalkylering funnits i en strävan efter att kunna lösa olika fysikaliska problem, vilka i matematiken exempelvis kan översättas till differentialekvationer (Katz, 2009, s.584). Potensserier och oändliga summor har därför varit av stort intresse för flera matematiker då de bland annat varit användbara för beräkning av just dessa (Katz, 2009, s.572).

Isaac Newton och Gottfried Wilhelm von Leibnitz var två matematiker som oberoende av varandra under den senare delen av 1600-talet, behandlade bland annat just potensserier i sina skilda arbeten inom analytisk matematik (Katz 16, 2009, s.544-572).

I slutet av 1600-talet kom, såväl bröderna som matematikerna, Jakob och Johann Bernoulli att tillsammans börja arbeta med Leibnitz verk för att sedan själva komma med egna bidrag inom området (Katz, 2009, s.585). Jakob Bernoulli arbetade bland annat med potensserier av heltal med samma exponent c , och i arbetet med dessa summor uppkom en talserie som senare kom att benämnas *Bernoullitalen*, men som även upptäcktes av andra matematiker i andra arbeten oberoende av varandra (Katz, 2009, s.644)(Bernoullital, 2017, 28 oktober).

Under 1700 talet blev Leonhard Euler verksam med bland annat Johann Bernoulli som lärare, och skulle komma att bli den ledande matematikern inom den analytiska matematiken under 1700-talet (Katz, 2009, s.584-594). I ett av hans verk *Introductio* utvecklade han de områden som han ansåg vara absolut nödvändiga inom analysen, vilket resulterade i ett stort fokus på funktioner och oändligheten, där han behandlade begreppen oändliga serier, oändliga produkter samt oändliga kvoter (Katz, 2009, s.617-618). En viktig del om funktioner var hans övertygelse om att alla funktioner kunde

uttryckas som en potensserie, med eventuellt något undantag (Katz, 2009, s.618). I sitt arbete med oändliga serier lyckades han bland annat med att lösa Baselproblemet, det vill säga beräkna den oändliga serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(Baselproblemet, 2017, 28 oktober). Han beräknade den med hjälp av en formel som senare kom att kallas Euler-Maclaurins summationsformel, vilken gav ett samband mellan summor och integraler och där Bernoullitalen som nämnts tidigare är en viktig del (Euler-Maclaurins formel, 2017, 1 oktober). Formeln jobbades fram av de båda matematikerna som gett den namnet, dock oberoende av varandra och för att lösa olika slags problem (Euler-Maclaurins formel, 2017, 1 oktober).

Att framställa en funktion som en potensserie samt att kunna beräkna dessa oändliga serier har alltså varit viktigt i den analytiska matematiken, där flera matematiker har varit inblandade och vi har redogjort för några av dem.

2 Approximation av oändliga serier

2.1 Enskilt fall

Vi vill kunna approximera den oändliga serien

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

effektivt och med god noggrannhet.

Vi börjar därför med att dela upp summan

$$S = S_N + R_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

och vill nu uppskatta storleken av R_N , då det är först då som vi kommer att kunna approximera summans värde.

Följande olikhet gäller för funktionen $\frac{1}{n^2}$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

som vi omvandlar till ett uttryck för R_N genom att summera alla led från $n = N+1$ till ∞

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = R_N < \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Summorna i höger- och vänsterledet är teleskoperande, det vill säga att nästan alla termer tar ut varandra, vilket resulterar i att

$$\frac{1}{N+1} < R_N < \frac{1}{N}.$$

Summan S kan därmed approximeras som

$$S < S_N + \frac{1}{N}.$$

Vi ville dock ha ett effektivt sätt att göra detta på samt få god noggrannhet i vårt resultat, det vill säga få R_N så liten som möjligt, men då N kan variera stort kan det bli mer eller mindre omständliga beräkningar samt stor

variation på noggrannheten i approximationen ovan. Vi ska därför jobba oss fram mot en just mer effektiv metod.

2.2 Effektiv metod

Vad vi gjorde ovan för att approximera värdet av R_N var alltså att stänga in summan mellan två värden. Detta kan liknas med ett sätt att beräkna integraler där man approximerar en integral med två Riemannsummor, en undersumma och en översumma. Vi ska nu visa just detta men även det motsatta, att integraler kan approximera summor, i vårt arbete mot en effektiv metod för att approximera oändliga serier.

Vi använder oss av samma funktion som tidigare $f(x) = \frac{1}{x^2}$ vilken är avtagande och konvergerar mot noll, det vill säga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$$

och

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \text{då} \quad k \leq x \leq k+1.$$

Vi integrerar nu alla led i den första olikheten ovan mellan k och $k+1$ och får att

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \quad ,$$

för att sedan summera alla led från $k = N+1$ till ∞ (summationsgränserna för R_N), vilket ger oss

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} f(k) \leq \int_{N+1}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} f(k) \quad .$$

Nu skriver vi in vår funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i olikheten så

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

och vi har alltså approximerat integralen med två summor.

En omskrivning av olikheten ger oss

$$R_N - \frac{1}{(N+1)^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq R_N$$

så vi har följande approximation av R_N

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq R_N \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{(N+1)^2}.$$

Vi har alltså visat att summan R_N kan approximeras bra med integraler, vilka är betydligt mer effektiva att beräkna.

I det fortsatta arbetet mot en effektiv metod kommer vi därför att jobba med integraler och börjar med att beräkna integralen av en funktion $f(x)$ på det valda intervallet $[0, 1]$, där vi partialintegrerar $f(x)$ enligt formeln

$$\int g(x)f(x)dx = G(x)f(x) - \int G(x)f'(x)dx.$$

Då $g(x) = 1$ och $G(x)$ bestäms till $(x - \frac{1}{2})$ får vi följande uttryck

$$\int_0^1 1 \cdot f(x)dx = \frac{f(1) + f(0)}{2} - \int_0^1 (x - \frac{1}{2})f'(x)dx \quad (1)$$

Den primitiva funktionen $G(x)$ bestämde vi själva och är ett Bernoullipolynom, mer specifikt det första Bernoullipolynomet

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Bernoullipolynomen kommer att vara viktiga i vårt fortsatta arbete med (1), så innan vi fortsätter måste vi introducera och definiera Bernoullipolynomen samt redogöra för dess egenskaper.

3 Bernoullipolynom och Bernoullital

3.1 Definition av Bernoullipolynomen

Bernoullipolynomen har uppkommit i arbetet med olika speciella funktioner inom matematiken (Bernoulli polynomials, 2018, 15 januari) och de definieras enligt följande

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x), \quad B_n(0) = B_n(1), \quad n > 1 \quad (3)$$

$$\int_0^1 B_{n-1}(x)dx = 0, \quad n > 1 \quad (4)$$

Villkor (4) följer av villkor (3) då

$$\int_0^1 B_{n-1}(x)dx = \int_0^1 \frac{B'_n(x)}{n}dx = \left[\frac{B_n(x)}{n} \right]_0^1 = \frac{B_n(1) - B_n(0)}{n} = 0$$

och vi ser att $B_n(0) = B_n(1)$ från (3) är ekvivalent med (4), det vill säga

$$B_n(0) = B_n(1) \Leftrightarrow \int_0^1 B_{n-1}(x)dx = 0 \quad ,$$

givet att $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ och $n > 1$.

Enligt $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ från (3) beräknas B_n rekursivt, då B_n bestäms av B_{n-1} så när som på en konstant som adderas och bestäms av (4). Av detta följer att det finns en *unik* följd av polynom som uppfyller (2), (3) och (4).

Då vi har $B_1(x)$ given kan vi alltså beräkna alla övriga Bernoullipolynom och vi räknar nu fram de sex första, där vi gör beräkningen av $B_2(x)$ utförligt och sedan presenterar de fyra efterföljande färdiga då de räknas fram på samma sätt.

Vi sätter $n = 2$ i (3) och får att $B'_2(x) = 2B_1(x)$, där $B_1(x)$ finns given enligt (2) så

$$B'_2(x) = 2B_1(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1$$

och

$$B_2(x) = \int (2x - 1) = x^2 - x + c \quad .$$

Nu vill vi bestämma integrationskonstanten c , vilken beräknas genom att sätta $n = 3$ i (4) och som ger oss att

$$\int_0^1 B_2(x) = 0$$

så

$$\int_0^1 B_2(x) = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0$$

och

$$c = \frac{1}{6} \quad .$$

Slutligen har vi alltså att

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

och alla de sex polynomen nedan

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - 3\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6} \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42} \quad .
\end{aligned}$$

3.2 Bernoullital

Det finns flera olika sätt att räkna fram Bernoullipolynomen på, bland annat med hjälp av följande formel

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_{n,k} x^{n-k} \quad n \geq 1 \quad (5)$$

där vi finner faktorn $\beta_{n,k}$. $\beta_{n,k}$ representerar Bernoullitalen vilka är en följd av rationella tal som förekommer på flera olika ställen i matematiken (Bernoullital, 2017, 28 oktober).

Enligt formel (5) beror Bernoullitalen på både n och k , men när vi beräknar de två första Bernoullipolynomen nedan med hjälp av formeln och sedan jämför resultatet med våra tidigare beräkningar, ser de ut att endast bero på k .

Vi sätter $n = 1$ och $n = 2$ i (5) och får att

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= \binom{1}{0} \beta_{1,0} x + \binom{1}{1} \beta_{1,1} \\
&= \beta_{1,0} x + \beta_{1,1} \\
B_2(x) &= \binom{2}{0} \beta_{2,0} x^2 + \binom{2}{1} \beta_{2,1} x + \binom{2}{2} \beta_{2,2} \\
&= \beta_{2,0} x^2 + 2\beta_{2,1} x + \beta_{2,2} \quad .
\end{aligned}$$

När vi jämför resultatet med de tidigare beräkningarna av $B_1(x)$ och $B_2(x)$ ser vi att

$$\beta_{1,0} = 1, \beta_{1,1} = -\frac{1}{2}, \beta_{2,0} = 1, \beta_{2,1} = -\frac{1}{2}, \beta_{2,2} = \frac{1}{6}$$

och att Bernoullitalen endast verkar bero på k .

Denna observation stämmer och vi ska nu ska bevisa detta. Vi börjar med att derivera formel (5)

$$\begin{aligned} B'_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_{n,k} \cdot (n-k)x^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k) \cdot \beta_{n,k} x^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n \cdot (n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \beta_{n,k} x^{n-k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \beta_{n,k} x^{n-k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \beta_{n,k} x^{n-k-1} \end{aligned}$$

för att sedan skriva om derivatan först enligt (3) och sedan (5)

$$\begin{aligned} B'_n(x) &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \beta_{n,k} x^{n-k-1} \\ &= n B_{n-1}(x) \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \beta_{n-1,k} x^{n-1-k} . \end{aligned}$$

Här ser vi nu att $\beta_{n-1,k} = \beta_{n,k}$ så $\beta_{n,k} = \beta_{0,k}$ för alla n , det vill säga Bernoullitalen beror inte på n .

Vi skriver därför om (5) till

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k x^{n-k}, \quad n \geq 1 \tag{6}$$

och de tre första Bernoullitalen är

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{6}.$$

Vi ska nu arbeta oss fram till ett uttryck för att kunna beräkna Bernoullitalen rekursivt.

En utveckling av formel (6) ger

$$B_n(x) = \binom{n}{0}\beta_0x^n + \binom{n}{1}\beta_1x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}\beta_{n-1}x + \binom{n}{n}\beta_n$$

så

$$\begin{aligned} B_n(0) &= \binom{n}{n}\beta_n = \beta_n \\ B_n(1) &= \binom{n}{0}\beta_0 + \binom{n}{1}\beta_1 + \dots + \binom{n}{n-1}\beta_{n-1} + \binom{n}{n}\beta_n. \end{aligned}$$

Enligt (3) är då

$$\binom{n}{0}\beta_0 + \binom{n}{1}\beta_1 + \dots + \binom{n}{n-1}\beta_{n-1} + \binom{n}{n}\beta_n = \beta_n$$

så

$$\binom{n}{0}\beta_0 + \binom{n}{1}\beta_1 + \dots + \binom{n}{n-1}\beta_{n-1} = 0$$

det vill säga

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta_k = 0, \quad n \geq 2.$$

En enkel omskrivning ger oss

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \beta_k = 0, \quad n \geq 1$$

och bryter vi nu ut β_n får vi följande uttryck för att beräkna det n :te Bernoullitalet rekursivt

$$\beta_n = - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \beta_k}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

3.3 Egenskaper hos Bernoullipolynomen och Bernoullitalen

Symmetri och antisymmetri

En viktig egenskap hos Bernoullipolynomen är att de är symmetriska respektive antisymmetriska med avseende på $x = \frac{1}{2}$, det vill säga

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad (7)$$

För att bevisa denna egenskap skriver vi om (7) till

$$(-1)^n B_n(1-x) = B_n(x)$$

och definierar ett nytt polynom $C_n(x)$ av vänsterledet

$$C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

som vi ska visa att uppfyller (3) likt $B_n(x)$, högerledet.

Vi börjar med att sätta $x = 0$ och $x = 1$ vilket ger oss att

$$C_n(0) = (-1)^n B_n(1)$$

och

$$C_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

och då $B_n(1) = B_n(0)$ enligt (3) så är även $C_n(1) = C_n(0)$.

Nu återstår att visa egenskapen för derivatan i (3). Vi deriverar därför $C_n(x)$ och får att

$$\begin{aligned} C'_n(x) &= (-1)^n (-1) B'_n(1-x) \\ &= (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-x) \end{aligned}$$

och jämför nu $C_n(x)$ med dess derivata

$$\begin{aligned} C_n(x) &= (-1)^n B_n(1-x) \\ C'_n(x) &= n(-1)^{n-1} B_{n-1}(1-x) . \end{aligned}$$

Om vi nu studerar högerledet i $C'_n(x)$ ser vi att det kan skrivas om till

$nC_{n-1}(x)$ enligt definitionen av $C_n(x)$, så

$$C'_n(x) = nC_{n-1}(x)$$

och $C_n(x)$ uppfyller alltså alla egenskaper i (3) .

Bernoullital med udda index

För Bernoullitalen med udda index gäller att

$$\beta_{2k+1} = 0 \quad , \quad k \geq 1 \quad .$$

Denna egenskap följer av (3) och (7), då om vi sätter att $x = 0$ i (7) får

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

vilket enligt (3) är ekvivalent med

$$B_n(0) = (-1)^n B_n(0)$$

för alla $n \geq 2$. Ett udda n ger då att

$$B_{2k+1}(0) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(0)$$

och det enda som uppfyller denna likhet är att $B_{2k+1}(0) = 0$. Vi har från (6) att $B_n(0) = \beta_n$ vilket betyder att Bernoullitalet är noll för alla $n = 2k + 1$ där $k \geq 1$.

Bernoullipolynom med udda index

För Bernoullipolynomen med udda index $B_{2k+1}(x)$ gäller att

$$B_{2k+1}(x) = 0$$

för $k \geq 1$ på intervallet $[0,1]$ i punkterna $0, \frac{1}{2}, 1$ och inga andra. Detta ska vi bevisa genom att först visa att de är noll i punkterna $0, \frac{1}{2}$ och 1 , för att sedan skissa upp graferna till de första Bernoullipolynomen och med hjälp av dem och induktion visa att de även är de enda punkterna.

Från (6) är

$$B_{2k+1}(0) = \beta_{2k+1} = 0 \quad , \quad k \geq 1$$

och enligt (3) är då

$$B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0 \quad , \quad k \geq 1 \quad .$$

Antisymmetrin från egenskap (7) ger att

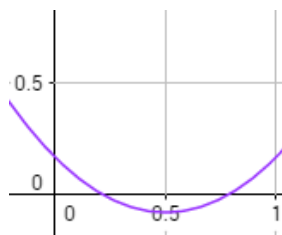
$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

så

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad .$$

Nu återstår att visa att de udda polynomen är noll i endast de tre punkterna och inga andra på intervallet. Vi kommer att börja med att skissa upp graferna till B_2, B_3, B_4 och B_5 på intervallet vilket vi gör utifrån att vi har B_2 given

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$



Figur 1: $B_2(x)$.

Vid skissning av B_3 vet vi att $B_3(x) = 0$ i punkterna $0, \frac{1}{2}$ och 1 och att

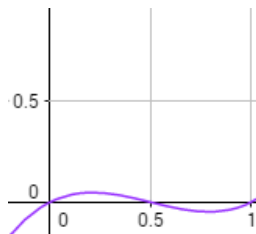
$$B_3'(x) = 3B_2(x)$$

enligt (3), så vår graf över B_2 ger oss information om derivatan till B_3 . B_2 skär ju x-axeln i samma punkter som derivatan $3B_2$ och det är det vi är intresserade av för att kunna skissa B_3 , var derivatan är positiv, negativ samt byter tecken.

Extrempunkterna hos B_3 är där $B_2 = 0$, alltså i de två punkterna

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0 \right] \quad \text{och} \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0 \right] \quad ,$$

där vi ser att den första är en maximipunkt och den andra en minimipunkt av att studera grafen. B_3 är alltså växande på intervallet $[0, (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})[$, avtagande på intervallet $](\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}})[$ och växande igen på intervallet $](\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, 1]$.

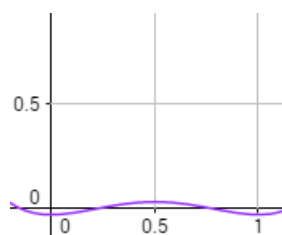


Figur 2: $B_3(x)$

När vi nu ska skissa B_4 studerar vi istället teckenväxlingen hos B_3 . Vi ser direkt att B_4 har en maximipunkt när $x = \frac{1}{2}$ samt två minimipunkter när $x = 0$ och $x = 1$ då derivatan är negativ för $x < 0$, positiv på intervallet $]0, \frac{1}{2}[$, negativ igen på intervallet $]\frac{1}{2}, 1[$ och slutligen positiv igen för $x > 1$.

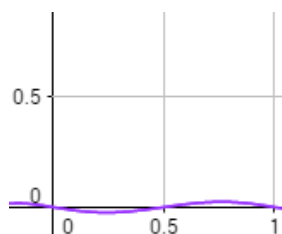
Vi behöver nu veta var i förhållande till x-axeln som kurvan till B_4 ligger. Är den endast ovanför x-axeln och bara antar positiva värden, endast under x-axeln och bara antar negativa värden, eller korsar den x-axeln och antar både negativa och positiva värden? För att ta reda på detta använder vi nu att B_4 i sin tur ger teckenväxlingen hos derivatan till B_5 .

Då vi vet att B_5 är noll i minst de tre punkterna $0, \frac{1}{2}$ och 1 på intervallet $[0, 1]$ måste kurvan alltså ha minst två extrempunkter där. Extrempunkterna kan inte kan vara terrasspunkter då kurvan ju måste tillbaka till x-axeln i varje nollställe, så den är varken strängt växande eller avtagande och B_4 måste därför korsa x-axeln för att kunna anta både positiva och negativa värden. I och med symmetrin enligt (7) korsar B_4 x-axeln i punkterna $x = \alpha$ och $x = (1 - \alpha)$, och vi har nu tillräckligt med information för att skissa upp grafen.



Figur 3: $B_4(x)$

För att till sist kunna skissa upp B_5 måste vi veta exakt hur många extrempunkter B_5 har på intervallet $[0,1]$, och då B_4 endast har två nollställena medför det att B_5 endast kan ha två stycken extrempunkter.



Figur 4: $B_5(x)$

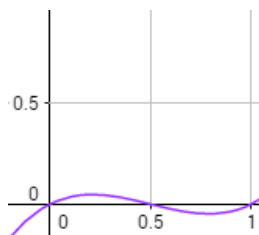
Av att nu ha analyserat och skissat upp graferna för några av de första Bernoullipolynomen, har vi visat för B_3 och B_5 specifikt att de enda nollställena för dem på intervallet $[0,1]$ är just 0 , $\frac{1}{2}$ och 1 , att de även korsar x-axeln i dessa punkter, samt har två extrempunkter vardera uppdelade på delintervallen $]0, \frac{1}{2}[$ och $]\frac{1}{2}, 1[$.

Vi ska nu med induktion visa att detta gäller för alla Bernoullipolynom med udda index större än 1, där vi precis gjort bassteget i skissandet av B_3 och B_5 .

Bassteget följs nu upp av induktionsantagandet att

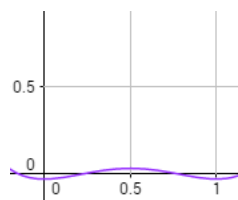
$$B_{2k-1}(x) = 0 \iff x = 0, \frac{1}{2}, 1 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{för} \quad k > 1,$$

att B_{2k-1} korsar och inte tangerar x-axeln i dessa tre punkter, samt att B_{2k-1} endast har ett extremvärde i vardera delintervallen $]0, \frac{1}{2}[$ och $]\frac{1}{2}, 1[$. För att förtydliga speglar grafen nedan induktionsantagandet på ett av två möjliga sätt

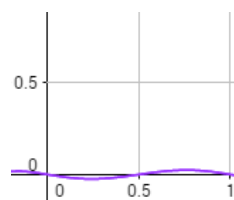


Figur 5: $B_{2k-1}(x)$

Enligt (3) är $B'_{2k} = (2k)B_{2k-1}$ så B_{2k-1} speglar derivatans teckenväxling hos B_{2k} . Induktionsantagandet ger därmed att B_{2k} har tre extremvärden i punkterna 0, $\frac{1}{2}$ och 1 på intervallet som antingen är maximi- eller minimipunkter, samt två nollställen uppdelade på varsitt delintervall $]0, \frac{1}{2}[$ och $]\frac{1}{2}, 1[$ där kurvan korsar x-axeln, se figur 6 som bygger på hur vi valde att skissa B_{2k-1} . Av att endast studera B_{2k} ritar vi nu upp B_{2k+1} enligt (3) och när vi sedan jämför B_{2k+1} med B_{2k-1} som den följer av, ser vi att de har likadana egenskaper och beviset är klart.



Figur 6: $B_{2k}(x)$



Figur 7: $B_{2k+1}(x)$

Egenskap (8)

För Bernoullipolynomen gäller följande

$$B_n(2x) = 2^{n-1}(B_n(x) + B_n(x + \frac{1}{2})) \quad (8)$$

och vi ska visa denna identitet med induktion över indexet n .

Bassteget Vi sätter $n = 1$ och beräknar att (8) stämmer i detta enskilda fall

$$\begin{aligned} B_1(2x) &= B_1(x) + B_1(x + \frac{1}{2}) \\ 2x - \frac{1}{2} &= (x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \\ &= 2x - \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Induktionsantagande och induktionssteg Vi definierar nu två nya polynom $C_n(x)$ och $D_n(x)$ av höger- och vänsterledet i (8)

$$\begin{aligned} C_n(x) &= B_n(2x) \\ D_n(x) &= 2^{n-1}(B_n(x) + B_n(x + \frac{1}{2})) \end{aligned}$$

där vi alltså ska visa att $C_n(x) = D_n(x)$ och gör induktionsantagandet att $C_{n-1}(x) = D_{n-1}(x)$ för något visst n .

Vi börjar med att derivera $C_n(x)$ och $D_n(x)$ enligt kedjeregeln och skriver sedan om derivatorna enligt egenskap (3)

$$\begin{aligned} C'_n(x) &= 2B'_n(2x) = 2nB_{n-1}(2x) \\ D'_n(x) &= 2^{n-1}(B'_n(x) + B'_n(x + \frac{1}{2})) \\ &= 2^{n-1}(nB_{n-1}(x) + nB_{n-1}(x + \frac{1}{2})) \\ &= 2n2^{n-2}(B_{n-1}(x) + B_{n-1}(x + \frac{1}{2})) . \end{aligned}$$

Av att studera derivatorna ser vi att

$$\begin{aligned} C'_n(x) &= 2nC_{n-1}(x) \\ D'_n(x) &= 2nD_{n-1}(x) \end{aligned}$$

och induktionsantagandet medför alltså att $C'_n(x) = D'_n(x)$. Vid integrering får vi då att

$$C_n(x) = D_n(x) + k \quad (9)$$

och om vi nu kan visa att $k = 0$ så är beviset klart.

För att göra detta kommer vi nu att vilja integrera (9) på ett sätt så att vi kan tillämpa egenskap (4), det vill säga att

$$\int_0^1 B_{n-1}(x)dx = 0 \quad n > 1$$

i våra beräkningar.

Vi börjar därför med att skriva om (9) till

$$B_n(2x) = 2^{n-1}(B_n(x) - B_n(x + \frac{1}{2})) + k$$

för att sedan studera vänsterledet, där vi alltså vill integrera $B_n(2x)$ och samtidigt få det omskrivet till $B_n(x)$ för att gå mot att likna (4). Vi testar därför att integrera över intervallet $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$VL : \int_0^{\frac{1}{2}} B_n(2x)dx = \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 B_n(t)dt = 0$$

där vi med ett variabelbyte lyckas skriva om $B_n(2x)$ till $B_n(t)$ samt få det önskade integrationsintervallet $0 \leq t \leq 1$.

Nu testar vi att integrera över samma intervall i högerledet och ser om beräkningarna förenklas även här

$$\begin{aligned} HL : & \quad 2^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} (B_n(x) + B_n(x + \frac{1}{2}))dx + \int_0^{\frac{1}{2}} kdx \\ & = \quad 2^{n-1} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} B_n(x + \frac{1}{2}) dx \right) + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

där vi gör följande variabelbyte i den senare integralen

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(x + \frac{1}{2})dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(t)dt$$

och alltså skriver om termen $B_n(x + \frac{1}{2})$ till $B_n(t)$ och även här efterliknar (4). Detta ger att

$$\begin{aligned} HL : & \quad 2^{n-1} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(t) dt \right) + \frac{k}{2} \\ &= \quad 2^{n-1} \int_0^1 B_n(x) dx + \frac{k}{2} \\ &= \quad 0 + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Med integration över $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ har vi alltså lyckats skriva om VL och HL i (9) till

$$\begin{aligned} VL &= \int_0^{\frac{1}{2}} C_n(x) dx = 0 \\ HL &= \int_0^{\frac{1}{2}} (D_n(x) + k) dx = 0 + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

så

$$0 = 0 + \frac{k}{2}$$

det vill säga $k = 0$ och beviset är klart.

Egenskap (10) och (11)

Vi ska nu visa att för $k \geq 1$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ så gäller

$$|B_{2k}(x)| \leq |\beta_{2k}| \quad (10)$$

och

$$|B_{2k+1}(x)| \leq \frac{(2k+1)|\beta_{2k}|}{4} \quad (11)$$

för Bernoullipolynomen.

Högerleden representerar alltså antingen maximivärdet för polynomen på intervallet, alternativt ett högre värde än maximivärdet som polynomen aldrig kommer att kunna anta. Det vi ska visa är därmed att

$$|B_{2k}(x)| \leq |B_{2k}(\alpha_n)| \leq |\beta_{2k}|$$

och

$$|B_{2k+1}(x)| \leq |B_{2k+1}(\gamma_n)| \leq \frac{(2k+1)|\beta_{2k}|}{4}$$

där α_n och γ_n är extrem- och ändpunkterna för varje polynom. Vi måste kontrollera alla dessa punkter då polynomen är givna som absolutbelopp i (10) och (11) och eventuella negativa minimivärden eller ändpunkter därför kommer att bli positiva.

Vi börjar med att visa (10), det vill säga att

$$|B_{2k}(x)| \leq |B_{2k}(\alpha_n)| \leq |\beta_{2k}|$$

för extrempunkterna och ändpunkterna α_n . Ändpunkterna är 0 och 1 och extrempunkten på intervallet finns där $x = \frac{1}{2}$ för polynomen med jämna index enligt (7) då $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$.

Vi har att

$$|B_{2k}(0)| = |B_{2k}(1)| = |\beta_{2k}|$$

enligt (3) och (6) vilket uppfyller (10), så kan vi nu även visa att

$$|B_{2k}(\frac{1}{2})| \leq |\beta_{2k}|$$

så är beviset klart.

Genom att sätta $x = 0$ i (8) och sedan göra en enkel omskrivning har vi att

$$B_{2k}(\frac{1}{2}) = B_{2k}(0)(2^{-(2k-1)} - 1)$$

det vill säga

$$|B_{2k}(\frac{1}{2})| = |B_{2k}(0)| |(2^{-(2k-1)} - 1)|$$

där

$$|(2^{-(2k-1)} - 1)| < 1$$

vilket gör att

$$|B_{2k}(\frac{1}{2})| < |B_{2k}(0)| = |\beta_{2k}|.$$

Alltså är

$$|B_{2k}(\frac{1}{2})| < |\beta_{2k}|$$

och beviset är nu klart.

Nu ska vi visa (11), det vill säga att

$$|B_{2k+1}(x)| \leq |B_{2k+1}(\gamma_n)| \leq \frac{(2k+1)|\beta_{2k}|}{4}$$

för extrem- och ändpunkterna γ_n på intervallet.

Vi börjar med att titta på ändpunkterna 0 och 1 där vi har att

$$|B_{2k+1}(0)| = |B_{2k+1}(1)| = |0| < \frac{(2k+1)|\beta_{2k}|}{4}$$

vilket alltså uppfyller (11).

Gällande extrempunkterna vet vi att det finns två extrempunkter på intervallet hos B_{2k+1} och att de ligger i varsitt delintervall $]0, \frac{1}{2}[$ och $]\frac{1}{2}, 1[$. Av antisymmetrin enligt (7) ger de två extrempunkterna γ_1 och γ_2 , där $\gamma_2 = (1 - \gamma_1)$, likadana funktionsvärden fast med olika tecken

$$B_{2k+1}(\gamma_1) = -B_{2k+1}(\gamma_2)$$

och då vi i (11) endast behandlar absolutbelopp, kommer de båda punkterna att ge samma värde och vi behöver därför endast studera en av punkterna och se att den stämmer. Vi väljer att undersöka $x = \gamma_1$.

Vi skriver om extremvärdet $|B_{2k+1}(\gamma_1)|$ med hjälp av (3), triangelolikheten för integraler, samt att $B_{2k+1}(0) = 0$ till

$$|B_{2k+1}(\gamma_1)| = |B_{2k+1}(\gamma_1) - B_{2k+1}(0)| \leq (2k+1) \int_0^{\gamma_1} |B_{2k}(x)| dx$$

och då vi enligt (10) har att $|B_{2k}(x)| \leq |\beta_{2k}|$ så får vi att

$$|B_{2k+1}(\gamma_1)| \leq (2k+1) \int_0^{\gamma_1} |\beta_{2k}| dx \quad .$$

Vi beräknar nu integralen

$$(2k+1) \int_0^{\gamma_1} |\beta_{2k}| dx = (2k+1) [x|\beta_{2k}|]_0^{\gamma_1} = (2k+1)\gamma_1|\beta_{2k}|$$

och vi har då följande uttryck för extremvärdet

$$|B_{2k+1}(\gamma_1)| \leq (2k+1)\gamma_1|\beta_{2k}| \quad (12)$$

Detta uttryck liknar nu (11), men det kvarstår att visa att $\gamma_1 \leq \frac{1}{4}$.

γ_1 ligger alltså någonstans på delintervallet $]0, \frac{1}{4}]$ av $[0, \frac{1}{2}]$ enligt (11). Om vi därför beräknar derivatan när $x = \frac{1}{4}$ och $x = \frac{1}{2}$ och jämför dess tecken i båda punkterna ser vi var extrempunkten måste ligga då en extrempunkt alltid resulterar i en teckenväxling hos derivatan. Har den då samma tecken i $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$ måste γ_1 ligga utanför dessa punkter och därmed på intervallet $]0, \frac{1}{4}[$.

Enligt (3) är derivatan $(2k+1)B_{2k}$ och då den har samma tecken som B_{2k} gör vi våra beräkningarna för B_{2k} . Vi har redan ett uttryck för $B_{2k}(\frac{1}{2})$ från (8)

$$B_{2k}(\frac{1}{2}) = \beta_{2k}(2^{-(2k-1)} - 1)$$

så det återstår endast att beräkna $B_{2k}(\frac{1}{4})$.

Vi sätter därmed in $x = \frac{1}{4}$ och $n = 2k$ i (8) och får att

$$B_{2k}(\frac{1}{2}) = 2^{2k-1}(B_{2k}(\frac{1}{4}) + B_{2k}(\frac{3}{4})) .$$

Högerledet kan nu skrivas om då B_{2k} är symmetriska enligt (7) till

$$\begin{aligned} B_{2k}(\frac{1}{2}) &= 2^{2k-1}2B_{2k}(\frac{1}{4}) \\ &= 2^{2k}B_{2k}(\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

och med några enkla omskrivningar får vi att

$$\begin{aligned} B_{2k}(\frac{1}{4}) &= 2^{-2k}B_{2k}(\frac{1}{2}) \\ &= 2^{-2k}B_{2k}(0)(2^{-(2k-1)} - 1) \\ &= \beta_{2k}2^{-2k}(2^{-(2k-1)} - 1) . \end{aligned}$$

Nu har vi alltså uttryck för både $B_{2k}(\frac{1}{2})$ och $B_{2k}(\frac{1}{4})$

$$B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \beta_{2k}(2^{-(2k-1)} - 1)$$

$$B_{2k}\left(\frac{1}{4}\right) = \beta_{2k}2^{-2k}(2^{-(2k-1)} - 1)$$

där vi ser att båda är negativa då

$$(2^{-(2k-1)} - 1) < 0 \quad .$$

Polynomet B_{2k} har alltså samma tecken i de två punkterna och derivatan $(2k+1)B_{2k}$ kommer därmed även den att ha samma tecken där. Detta gör att extrempunkten inte kan finnas på intervallet $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ utan måste befinna sig någonstans på intervallet $]0, \frac{1}{4}[$. Vi har alltså visat att $\gamma_1 < \frac{1}{4}$ så (12),

$$|B_{2k+1}(\gamma_1)| \leq (2k+1)\gamma_1|\beta_{2k}| \quad ,$$

uppfyller alltså (11),

$$|B_{2k+1}(x)| \leq \frac{(2k+1)|\beta_{2k}|}{4} \quad ,$$

även för γ_1 och beviset är klart.

Egenskap (13) och tillämpning av den

Nu ska vi visa att

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \tag{13}$$

och sedan använda uttrycket för att beräkna summan

$$\sum_{j=0}^N j^n \tag{14}$$

där n och N är positiva heltal.

Vi kommer att bevisa (13) med induktion och vi börjar med att definiera två nya polynom $f_n(x)$ och $g_n(x)$ för höger- och vänsterledet i (13)

$$f_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x)$$

och

$$g_n(x) = nx^{n-1} \quad .$$

Bassteget Vi beräknar nu $f_n(x)$ och $g_n(x)$ för $n = 1$

$$\begin{aligned}f_1(x) &= B_1(x+1) - B_1(x) = (x+1) - \frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2}) = 1 \\g_1(x) &= x^0 = 1\end{aligned}$$

och vi får att $f_1(x) = g_1(x)$ så (13) är alltså sant för $n = 1$.

Induktionsantagandet och induktionssteget Nu gör vi induktionsantagandet att (13) är sant för något n , det vill säga

$$f_n(x) = g_n(x)$$

och vill visa att likheten även gäller för indexet $n + 1$.

Vi börjar med att derivera f_{n+1} och g_{n+1} och får enligt egenskap (3) att

$$f'_{n+1}(x) = B'_{n+1}(x+1) - B'_{n+1}(x) = (n+1)(B_n(x+1) - B_n(x)) = (n+1)f_n(x)$$

och att

$$g'_{n+1}(x) = n(n+1)x^{n-1} = (n+1)g_n(x) .$$

Enligt induktionsantagandet ser vi då att

$$f'_{n+1}(x) = g'_{n+1}(x)$$

vilket om vi integrerar ger oss att

$$f_{n+1}(x) = g_{n+1}(x) + C .$$

Det som återstår nu är då att bestämma värdet av C . Vi sätter $x = 0$ och får att

$$\begin{aligned}f_{n+1}(0) &= B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0 \\g_{n+1}(0) &= 0\end{aligned}$$

så

$$0 = 0 + C$$

och

$$C = 0 .$$

Detta ger oss att $f_{n+1}(x) = g_{n+1}(x)$ och vi har bevisat att (13) är sant för alla n .

Beräkning av (14) Med hjälp av (13) ska vi nu ta fram ett alternativt uttryck för att beräkna (14)

$$\sum_{j=0}^N j^n .$$

Vi har enligt (13) att

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

och det vi kommer göra är att skriva om uttrycket med syfte att få högerledet att likna (14). Det första vi gör är att ändra index till $n+1$ så

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$$

vilket gör att högerledet får samma exponent som i (14). Vi summerar sedan alla led enligt summationsgränserna från (14) så

$$\sum_{j=0}^N (B_{n+1}(j+1) - B_{n+1}(j)) = (n+1) \sum_{j=0}^N j^n$$

och vi börjar nu att beräkna vänsterledet.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N (B_{n+1}(j+1) - B_{n+1}(j)) &= (B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)) + (B_{n+1}(2) - B_{n+1}(1)) \\ &+ \dots + (B_{n+1}(N) - B_{n+1}(N-1)) + (B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(N)) \end{aligned}$$

där vi ser att summan är teleskopande och nästan alla termer tar ut varandra. Resultatet blir att

$$\sum_{j=0}^N (B_{n+1}(j+1) - B_{n+1}(j)) = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0)$$

så

$$B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0) = (n+1) \sum_{j=0}^N j^n$$

och

$$\frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \sum_{j=0}^N j^n .$$

Nu har vi alltså jobbat fram ett uttryck för att kunna beräkna (14) innehållande Bernoullipolynomen. Vi kan även precisera med hjälp av deras egenskaper den specifika formeln för udda och jämna n

$$\begin{aligned} n = 2k & : \quad \sum_{j=0}^N j^n = \frac{B_{n+1}(N+1)}{n+1} \\ n = 2k+1 & : \quad \sum_{j=0}^N j^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - b_{n+1}}{n+1} . \end{aligned}$$

4 Approximation av oändliga serier - Fortsättning

4.1 Effektiv metod - Fortsättning

Nu återgår vi till identitet (1) som vi ska jobba vidare med i vårt arbete mot en effektiv metod för att approximera en oändlig serie. Då vi nu bekantat oss med Bernoullipolynomen börjar vi med att direkt skriva om (1) till

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(1) + f(0)}{2} - \int_0^1 B_1(x) f'(x) dx .$$

Med hjälp av Bernoullipolynomens egenskaper ska vi nu utveckla detta uttryck genom partialintegration av den sista termen i högerledet, där vi konsekvent kommer att beräkna och använda den primitiva funktion till Bernoullipolynomet där $C = 0$, och derivera den andra faktorn.

Enligt egenskap (3) är

$$\int B_1(x) = \frac{B_2(x)}{2} + C$$

där vi sätter att $C = 0$ så

$$\int_0^1 B_1(x) f'(x) dx = \left[\frac{B_2(x) f'(x)}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_2(x) f''(x)}{2} dx$$

och sätter vi in detta i formel (1) har vi att

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left(\left[\frac{B_2(x)f'(x)}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_2(x)f''(x)dx}{2} \right) .$$

Nu fortsätter vi på detta vis och partialintegrerar

$$\int_0^1 \frac{B_2(x)f''(x)dx}{2}$$

där vi får att

$$\frac{1}{2} \int_0^1 B_2(x)f''(x)dx = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{B_3(x)f''(x)}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_3(x)f'''(x)dx}{3} \right)$$

och vi sätter in detta i formeln ovan

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left(\left[\frac{B_2(x)f'(x)}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left(\left[\frac{B_3(x)f''(x)}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_3(x)f'''(x)dx}{3} \right) \right) \\ &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left(\left[\frac{B_2(x)f'(x)}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{B_3(x)f''(x)}{2 \cdot 3} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{B_3(x)f'''(x)dx}{2 \cdot 3} \right) \\ &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\frac{B_2(x)f'(x)}{2!} \right]_0^1 + \left[\frac{B_3(x)f''(x)}{3!} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_3(x)f'''(x)dx}{3!} . \end{aligned}$$

Nu börjar vi se ett mönster som vid vidare partialintegrering av den sista termen i högerledet kommer att leda oss fram till formeln

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k B_k(x)f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 \\ &\quad + (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(x)f^n(x)dx}{n!} \end{aligned} \tag{15}$$

vilken vi nu ska bevisa med induktion.

Bassteget Vi börjar med att visa (15) för $n = 1$,

$$\begin{aligned} (15)_{n=1} \quad \int_0^1 f(x)dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - 0 + (-1)^1 \int_0^1 \frac{B_1(x)f'(x)dx}{1!} \\ &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \int_0^1 B_1(x)f'(x)dx \end{aligned}$$

vilket stämmer enligt (1).

Induktionsantagandet Nu gör vi induktionsantagandet att (15) är sann för något $n = p$, det vill säga

$$\begin{aligned} (15)_{n=p} \quad \int_0^1 f(x)dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\sum_{k=2}^p (-1)^k \frac{B_k(x)f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 \\ &+ (-1)^p \int_0^1 \frac{B_p(x)f^p(x)dx}{p!} . \end{aligned}$$

Induktionssteget Vi ska nu visa att om (15) är sann för $n = p$, är den även sann för $n = p + 1$, det vill säga

$$\begin{aligned} (15)_{n=p+1} \quad \int_0^1 f(x)dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\sum_{k=2}^{p+1} \frac{(-1)^k B_k(x)f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 \\ &+ (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{B_{p+1}(x)f^{p+1}(x)dx}{(p+1)!} . \end{aligned}$$

Om vi då utgår från vårt induktionsantagande $(15)_{n=p}$ och partialintegrerar den sista termen i högerledet med hjälp av egenskap (3), så får vi att

$$(-1)^p \int_0^1 \frac{B_p(x)f^p(x)dx}{p!} = (-1)^p \left(\left[\frac{B_{p+1}(x)f^p(x)}{(p+1)!} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_{p+1}(x)f^{p+1}(x)}{(p+1)!} dx \right)$$

och

$$\begin{aligned}
(15)_{n=p} \quad \int_0^1 f(x) dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\sum_{k=2}^p \frac{(-1)^k B_k(x) f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 \\
&+ (-1)^p \left(\left[\frac{B_{p+1}(x) f^p(x)}{(p+1)!} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_{p+1}(x) f^{p+1}(x)}{(p+1)!} dx \right) \\
&= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\sum_{k=2}^p \frac{(-1)^k B_k(x) f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 \\
&+ (-1)^p \left[\frac{B_{p+1} f^p(x)}{(p+1)!} \right]_0^1 + (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{B_{p+1}(x) f^{p+1}(x)}{(p+1)!} dx \\
&= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\sum_{k=2}^p \frac{(-1)^k B_k(x) f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 \\
&- (-1)^{p+1} \left[\frac{B_{p+1} f^p(x)}{(p+1)!} \right]_0^1 + (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{B_{p+1}(x) f^{p+1}(x)}{(p+1)!} dx \\
&= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \left[\sum_{k=2}^{p+1} \frac{(-1)^k B_k(x) f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 \\
&+ (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{B_{p+1}(x) f^{p+1}(x)}{(p+1)!} dx \quad (15)_{n=p+1} .
\end{aligned}$$

Av att partialintegrera den sista termen i induktionsantagandet $(15)_{n=p}$ får vi alltså uttrycket för $(15)_{n=p+1}$. Så om (15) stämmer för $(15)_{n=p}$ stämmer det även för $(15)_{n=p+1}$ och beviset är klart.

Med hjälp av Bernoullipolynomens egenskaper ska vi nu skriva om (15) och vi utgår från att vi ska summera (15) upp till ett udda tal. Vi kommer ha fokus på den andra termen i högerledet, som vi direkt skriver om enligt följande

$$\left[\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k B_k(x) f^{k-1}(x)}{k!} \right]_0^1 = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left[B_k(x) f^{k-1}(x) \right]_0^1 .$$

Vi fortsätter denna omskrivning då

$$\left[B_k(x) f^{k-1}(x) \right]_0^1 = B_k(1) f^{k-1}(1) - B_k(0) f^{k-1}(0)$$

där

$$B_k(1) = B_k(0) = \beta_k \quad \text{för } k > 1$$

så

$$\left[B_k(x) f^{k-1}(x) \right]_0^1 = \beta_k \left(f^{k-1}(1) - f^{k-1}(0) \right) .$$

Använder vi nu detta i (15) så har vi att

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} \beta_k \left(f^{k-1}(1) - f^{k-1}(0) \right) \\ &+ (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(x) f^n(x) dx}{n!} . \end{aligned}$$

Då vi vet sedan tidigare att $\beta_k = 0$ för alla udda $k > 1$, så går alla termer i summan med udda k bort. Om vi därför väljer att summera upp till ett udda tal $n = 2p + 1$, kan vi formulera om uttrycket till

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} (f^{2k-1}(1) - f^{2k-1}(0)) \\ &- \int_0^1 \frac{B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx}{(2p+1)!} . \end{aligned} \tag{15}'$$

4.2 Euler-Maclaurins summationsformel

Vi har hittills jobbat med uttryck (1) där vi beräknar $\int_0^1 f(x) dx$ och ska nu fortsätta mot en formel för att beräkna $\int_N^M f(x) dx$. Egenskapen nedan

$$\int_a^c g(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

ger oss följande uttryck för integralen

$$\begin{aligned} \int_N^M f(x) dx &= \int_N^{N+1} f(x) dx + \int_{N+1}^{N+2} f(x) dx + \dots + \int_{M-1}^M f(x) dx \\ &= \sum_{n=N}^{M-1} \int_n^{n+1} f(x) dx \end{aligned}$$

där vi skriver om

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \quad \text{till} \quad \int_0^1 f(x+n)dx$$

och får att

$$\int_N^M f(x)dx = \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 f(x+n)dx .$$

Vi använder oss nu av detta för att skriva om (15)' från att beräkna $\int_0^1 f(x)dx$ till att beräkna $\int_N^M f(x)dx$, genom att först skriva om $f(x)$ till $f(x+n)$ och sedan summera båda leden från $n = N$ till $M-1$.

Först gör vi omskrivningen av $f(x)$ till $f(x+n)$ så

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x+n)dx &= \frac{f(n+1) + f(n)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} (f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n)) \\ &- \int_0^1 \frac{B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n)dx}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

och nu ska vi alltså summera båda leden från $n = N$ till $M-1$. Vi börjar med vänsterledet

$$\sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 f(x+n)dx = \int_N^M f(x)dx$$

och sedan högerledet

$$\begin{aligned} &\sum_{n=N}^{M-1} \left(\frac{f(n+1) + f(n)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} (f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n)) - \int_0^1 \frac{B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n)dx}{(2p+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{M-1} (f(n+1) + f(n)) - \sum_{n=N}^{M-1} \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} (f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n)) \\ &- \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n)dx \end{aligned}$$

så omskrivningen resulterar i följande uttryck

$$\begin{aligned}
\int_N^M f(x)dx &= \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{M-1} (f(n+1) + f(n)) \\
&- \sum_{n=N}^{M-1} \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n) \right) \\
&- \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n) dx
\end{aligned} \tag{16}$$

Vi har nu kommit en bit på väg i att få fram ett tillfredsställande uttryck för integralen $\int_N^M f(x)dx$, men ska jobba vidare med högerledet i (16) och då uttrycket är långt går vi igenom de tre olika summorna var för sig.

Den första summan

$$\frac{1}{2} \sum_{n=N}^{M-1} (f(n+1) + f(n))$$

delar vi direkt upp i två summor för att sedan utveckla och skriva om dem enligt nedan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{n=N}^{M-1} (f(n+1) + f(n)) &= \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{M-1} f(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{M-1} f(n) \\
&= \frac{(f(N+1) + \dots + f(M))}{2} + \frac{(f(N) + f(N+1) + \dots + f(M-1))}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=N+1}^{M-1} f(n) + f(M) + f(N) + \sum_{n=N+1}^{M-1} f(n) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \sum_{n=N+1}^{M-1} f(n) + f(M) + f(N) \right) \\
&= \sum_{N < n < M} f(n) + \frac{f(N) + f(M)}{2} .
\end{aligned}$$

Den andra summan

$$\sum_{n=N}^{M-1} \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n) \right)$$

kan vi skriva om till

$$\sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \sum_{n=N}^{M-1} \left(f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n) \right)$$

och utvecklar vi nu den inre summan ser vi att den är teleskoperande enligt

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{M-1} \left(f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n) \right) &= f^{2k-1}(N+1) - f^{2k-1}(N) + f^{2k-1}(N+2) - f^{2k-1}(N+1) \\ &\quad + \dots + f^{2k-1}(M-1) + f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(M-1) \\ &= f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \end{aligned}$$

så

$$\sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \sum_{n=N}^{M-1} \left(f^{2k-1}(n+1) - f^{2k-1}(n) \right) = \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \right) .$$

Omskrivningarna av de två första summorna i (16) har resulterat i följande uttryck

$$\begin{aligned} \int_N^M f(x) dx &= \sum_{N < n < M} f(n) + \frac{f(N) + f(M)}{2} \\ &\quad - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \right) \\ &\quad - \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n) dx . \end{aligned}$$

Vi ser nu att vi har termen

$$\sum_{N < n < M} f(n)$$

i högerledet och det är just den typen av summa som vi strävar efter att kunna beräkna och vill approximera med integralen $\int_N^M f(x) dx$. En enkel omskrivning ger oss då det exakta uttrycket för summan

$$\begin{aligned}
\sum_{N < n < M} f(n) &= \int_N^M f(x) dx - \frac{f(N) + f(M)}{2} \\
&+ \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \right) \\
&+ \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n) dx
\end{aligned} \tag{17}$$

Den sista summan i högerledet i (17) är fortfarande oförändrad från (16)

$$\frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n) dx \tag{18}$$

och kan betraktas som felet då de övriga termerna i (17) kommer att ge en bra approximation och beroende på storleken av n och p även vara enkla att beräkna. Vi jobbar därför vidare med (18) och vill få det så litet som möjligt samt möjligt att uppskatta.

Innan vi börjar vår omskrivning måste vi definiera nya funktioner

$$\overline{B}_v(x)$$

där

$$\overline{B}_v(x) = B_v(x) \quad \text{då} \quad 0 \leq x < 1 \quad .$$

Vi utvidgar nu så att $\overline{B}_v(x)$ blir periodiska med period 1 och uttrycker detta på följande sätt

$$\overline{B}_v(x+n) = B_v(x) \quad \text{då} \quad 0 \leq x < 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Funktionerna $\overline{B}_v(x+n)$ är på grund av periodiciteten inte polynom likt $B_v(x)$. När x går mot oändligheten i ett polynom divergerar ju polynomet mot den positiva- eller negativa oändligheten, medan en periodisk funktion varken divergerar eller konvergerar vid högre värden på x utan de funktionsvärden som antas på intervallet/perioden upprepas om och om igen.

Vi ska nu bevisa att $\overline{B}_v(x+n)$ är deriverbara $v-2$ gånger. Då $\overline{B}_v(x+n)$ beter sig som polynom på intervallen $]n, n+1[$ vet vi att de är kontinuerligt deriverbara där, men vi vet inte vad som händer i heltalspunkterna. Beviset

delas därför upp i två steg, då vi först måste bevisa att funktionerna är deriverbara även i heltalspunkterna och sedan att de är deriverbara just $v - 2$ gånger.

I första steget börjar vi med att bevisa följande sats

Sats 1 *Antag att funktionen f är kontinuerlig på ett intervall och deriverbar på intervallet utom möjligen i en punkt $x = a$. Antag vidare att gränsvärdena*

$$\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) \text{ och } \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$$

existerar och är lika. Då är f deriverbar för $x = a$

(Hyltén-Cavallius & Sandgren, 1964, s.222). Vi använder oss av medelvärdessatsen i beviset

Sats 2 (Medelvärdessatsen) *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a,b) . Om $x \in (a,b)$, så finns ett tal $\varepsilon \in (a,b)$ sådant att*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon) \text{ ,}$$

och undersöker sedan om $\overline{B}_v(x + n)$ är deriverbara i heltalspunkterna, det vill säga när $x = 0$ i och med periodiciteten, enligt Sats 1.

Bevis Sats 1 Låt först $x < a$. Enligt medelvärdessatsen finns det då ett tal ε sådant att $x < \varepsilon < a$ och

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\varepsilon).$$

När x går mot a , så går även ε mot a och eftersom $\lim_{\varepsilon \rightarrow a-} f'(\varepsilon)$ existerar, så existerar vänsterderivatan

$$f'(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

På samma sätt visar vi att högerderivatan $f'(a+)$ existerar och då

$$\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$$

så är $f'(a-) = f'(a+)$. Alltså är f deriverbar för $x = a$. □

Då vi har bevisat Sats 1 ska vi nu tillämpa den för att visa att $\overline{B}_v(x+n)$ är deriverbara i heltalspunkterna när $x = 0$.

Vi gör först antagandet att $v \geq 2$ då det enligt (3) ger att $B_v(0) = B_v(1)$ och därmed att funktionerna är kontinuerliga på hela intervallet $[n, n+1]$. Vi beräknar sedan vänster- och högerderivatan och får att

$$-1 < x < 0 \quad \overline{B}'_v(x+n) = B'_v(x+1) = vB_{v-1}(x+1) = v\overline{B}_{v-1}(x)$$

och

$$0 < x < 1 \quad \overline{B}'_v(x+n) = B'_v(x) = vB_{v-1}(x) = v\overline{B}_{v-1}(x) \quad .$$

De båda derivatorna $v\overline{B}_{v-1}(x)$ är dock endast kontinuerliga om $v-1 \geq 2$, så om $v-1 \geq 2$ så existerar de båda gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \overline{B}'_v(x+n) \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \overline{B}'_v(x+n)$$

samt är lika, alltså är då $\overline{B}_v(x+n)$ deriverbara för $x = 0$ enligt Sats 1.

Nu gör vi det andra steget, där vi ska visa att $\overline{B}_v(x+n)$ är deriverbara $v-2$ gånger. Om vi nämligen fortsätter att derivera $\overline{B}_v(x+n)$ enligt ovan så vet vi att de är deriverbara j gånger så länge $v-j \geq 2$. Vi skriver om olikheten till $v-2 \geq j$ och sätter att $j = v-2$ i $v\overline{B}_{v-j}(x)$ vilket resulterar i $v\overline{B}_2(x)$ som är kontinuerlig men inte deriverbar. Alltså är $\overline{B}_v(x+n)$ deriverbar $v-2$ gånger.

Vi ska nu använda dessa periodiska funktioner $\overline{B}_v(x+n)$ i omskrivningen av (18) och substituerar $B_v(x)$ mot dem enligt nedan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 B_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x+n) dx \\ = & \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_0^1 \overline{B}_{2p+1}(x+n) f^{2p+1}(x+n) dx \\ = & \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_n^{n+1} \overline{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx \end{aligned}$$

för att sedan tillämpa egenskapen

$$\int_a^c g(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

vilket ger att

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n=N}^{M-1} \int_n^{n+1} \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx \\ &= \frac{1}{(2p+1)!} \int_N^M \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx \quad . \end{aligned}$$

Nu har vi alltså skrivit om alla tre summor i (16) vilket resulterar i följande uttryck för integralen i (16)

$$\begin{aligned} \int_N^M f(x) dx &= \sum_{N < n < M} f(n) + \frac{f(N) + f(M)}{2} \\ &- \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \right) \\ &- \frac{1}{(2p+1)!} \int_N^M \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx \end{aligned} \quad (19)$$

som även kallas för Euler-Maclaurins summationsformel, samt följande uttryck för summan i (17) som alltså är en omskrivning av Euler-Maclaurins summationsformel

$$\begin{aligned} \sum_{N < n < M} f(n) &= \int_N^M f(x) dx - \frac{f(N) + f(M)}{2} \\ &+ \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \right) \\ &+ \frac{1}{(2p+1)!} \int_N^M \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx \end{aligned} \quad (20)$$

4.3 Approximering med Euler-Maclaurins summationsformel

Vi har arbetat oss fram till Euler-Maclaurins summationsformel och ska nu använda omskrivningen (20) av den för att approximera summorna

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

för några låga N och p .

Approximering av $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$

Vi delar först upp summan så

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

där den första summan beräknas numeriskt (vilket kan bli omständligt beroende på hur högt vi väljer N) medan den andra summan skrivs om och beräknas enligt (20).

Vi börjar med omskrivningen av den andra summan så

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} \frac{1}{n^2} &= \int_N^\infty f(x) - \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{f(N) + f(M)}{2} + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \right) \\ &+ \frac{1}{(2p+1)!} \int_N^\infty \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx \end{aligned}$$

och då

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

får vi att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

så

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} \frac{1}{n^2} &= \int_N^\infty \frac{1}{x^2} - \frac{f(N)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k} f^{2k-1}(N)}{(2k)!} + \frac{1}{(2p+1)!} \int_N^\infty \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx \\ &= \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k} f^{2k-1}(N)}{(2k)!} + \frac{1}{(2p+1)!} \int_N^\infty \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx . \end{aligned}$$

Den sista termen är resttermen, det vill säga

$$Rest_{p,N} = \frac{1}{(2p+1)!} \int_N^\infty \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx$$

och vi har nu följande uttryck för summan vi ska beräkna

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k} f^{2k-1}(N)}{(2k)!} + Rest_{p,N} \quad (21)$$

där beräkningarna kommer att göras för små värden på p och N .

Beräkning av (21)_(p=1, N=2) Vi börjar med att sätta $p = 1$

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} - \frac{\beta_2 f^1(N)}{2} + Rest_{1,N} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{6N^3} + Rest_{1,N} \end{aligned}$$

och går nu igenom resttermen för sig.

Vi har alltså att

$$\begin{aligned} Rest_{1,N} &= \frac{1}{6} \int_N^{\infty} \overline{B}_3(x) f^3(x) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_N^{\infty} \frac{\overline{B}_3(x) \cdot (-24)}{x^5} dx \\ &= -4 \int_N^{\infty} \frac{\overline{B}_3(x)}{x^5} dx \end{aligned}$$

och sätter nu absolutbelopp kring uttrycket för att sedan använda triangelolikheten, och får då att

$$\begin{aligned} |Rest_{1,N}| &= \left| -4 \int_N^{\infty} \frac{\overline{B}_3(x)}{x^5} dx \right| \\ &\leq 4 \int_N^{\infty} \frac{|\overline{B}_3(x)|}{x^5} dx . \end{aligned}$$

Av olikhet (11) följer att

$$|\overline{B}_3(x)| \leq \frac{3|\beta_2|}{4} = \frac{3}{4 \cdot 6} = \frac{1}{8}$$

så

$$\begin{aligned}
 |Rest_{1,N}| &\leq 4 \int_N^\infty \frac{1}{8x^5} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_N^\infty \frac{1}{x^5} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4x^4} \right]_N^\infty \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4N^4} \\
 &= \frac{1}{8N^4} .
 \end{aligned}$$

Vad vi ser nu är att resttermen är mycket liten redan vid ett litet p . Vi har alltså att

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{6N^3} + Rest_{1,N} \quad (22)$$

och ska nu även sätta in ett lågt värde på N . Vi sätter att $N = 2$ och beräknar (22) numeriskt

$$\begin{aligned}
 \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6(2^3)} + Rest_{1,2} \\
 &= \frac{48 + 12 + 24 - 6 + 1}{48} + Rest_{1,2} \\
 &= \frac{79}{48} + Rest_{1,2}
 \end{aligned}$$

för att sedan använda miniräknare och få värdet i decimalform

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \approx 1,64583 + Rest_{1,2}$$

där

$$|Rest_{1,2}| \leq \frac{1}{8 \cdot 2^4} = \frac{1}{128} = 0,0078125 .$$

Beräkning av $(21)_{(p=1, N=10)}$ Det kommer snabbt att bli mer omständligt att approximera

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

numeriskt vid högre värden på N , men vi vill göra en till approximation. Vi sätter $N = 10$ i (22) och behåller $p = 1$, för att sedan ta hjälp av en miniräknare i beräkningen för enkelhetens skull. Vi får då att

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} + Rest_{1,10} \\ &\approx 1.64493 + Rest_{1,10} \end{aligned}$$

där

$$|Rest_{1,10}| \leq \frac{1}{8000} = 0,0000125 .$$

Nu har vi alltså två stycken approximationer för låga p och N

$$\begin{aligned} (p = 1, N = 2) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} &\approx 1.64583 + Rest_{1,2} \\ (p = 1, N = 10) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} &\approx 1.64493 + Rest_{1,10} . \end{aligned}$$

Leonhard Euler har bevisat att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

och vi beräknar kvoten på en miniräknare för att kunna jämföra med våra värden så

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$$

(Katz, 2009, s.621). Vi ser då att våra approximationer är bra redan vid låga N och p , samt har god noggrannhet då resttermerna är mycket små.

Approximering av $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Nu gör vi på samma sätt för att beräkna $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}$ och börjar med att dela upp summan

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} .$$

Den senare summan utvecklar vi enligt (20) till

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} \frac{1}{n^4} &= \int_N^\infty \frac{1}{x^4} - \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{f(N) + f(M)}{2} + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1}(M) - f^{2k-1}(N) \right) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{(2p+1)!} \int_N^\infty \bar{B}_{2p+1}(x) f^{2p+1}(x) dx}_{Rest_{p,N}} \end{aligned}$$

och då

$$f(x) = \frac{1}{x^4}$$

har vi att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

så

$$\sum_{n>N} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{2N^4} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k} f^{2k-1}(N)}{(2k)!} + Rest_{p,N} .$$

Vi har nu uttrycket

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{2N^4} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k} f^{2k-1}(N)}{(2k)!} + Rest_{p,N} \quad (23)$$

för summan som vi vill beräkna för små värden på p och N .

Beräkning av $(23)_{(p=2, N=3)}$ Vi sätter $p = 2$ så

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{2N^4} - \left(\frac{\beta_2 f^1(N)}{2!} + \frac{\beta_4 f^3(N)}{4!} \right) + Rest_{2,N} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{2N^4} - \left(\left(\frac{\beta_2}{2} \cdot \frac{-4}{N^5} \right) + \left(\frac{\beta_4}{24} \cdot \frac{-120}{N^7} \right) \right) + Rest_{2,N} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{2N^4} - \left(\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{-4}{N^5} \right) + \left(\frac{-1}{720} \cdot \frac{-120}{N^7} \right) \right) + Rest_{2,N} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{2N^4} + \frac{1}{3N^5} - \frac{1}{6N^7} + Rest_{2,N} \end{aligned} \quad (24)$$

Vi beräknar nu resttermen

$$\begin{aligned}
Rest_{2,N} &= \frac{1}{5!} \int_N^\infty \overline{B}_5(x) f^5(x) dx \\
&= \frac{1}{120} \int_N^\infty \overline{B}_5(x) \frac{-6720}{x^9}(x) dx \\
&= -56 \int_N^\infty \frac{\overline{B}_5(x)}{x^9}(x) dx
\end{aligned}$$

och sätter absolutbelopp kring uttrycket samt använder oss av triangelolikheten likt tidigare, och får att

$$\begin{aligned}
|Rest_{2,N}| &= \left| -56 \int_N^\infty \frac{\overline{B}_5(x)}{x^9}(x) dx \right| \\
&\leq 56 \int_N^\infty \frac{|\overline{B}_5(x)|}{x^9} dx .
\end{aligned}$$

Av olikhet (11) följer att

$$|\overline{B}_5(x)| \leq \frac{5|\beta_4|}{4} = \left(\frac{5}{4} \cdot \left| \frac{-1}{30} \right| \right) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

så

$$\begin{aligned}
|Rest_{2,N}| &\leq 56 \int_N^\infty \frac{|\overline{B}_5(x)|}{x^9} dx \\
&= 56 \int_N^\infty \frac{1}{24x^9} dx \\
&= \frac{7}{3} \int_N^\infty \frac{1}{x^9} dx \\
&= \frac{7}{3} \left[\frac{-1}{8x^8} \right]_N^\infty \\
&= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{8N^8} \\
&= \frac{7}{24N^8} .
\end{aligned}$$

Vi har därmed att

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{2N^4} + \frac{1}{3N^5} - \frac{1}{6N^7} + Rest_{2,N} \quad (25)$$

där vi nu vill välja ett lågt värde på N . Vi sätter att $N = 3$ och beräknar

sedan summan med hjälp av miniräknare för enkelhetens skull

$$\begin{aligned}\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3(3^3)} - \frac{1}{2(3^4)} + \frac{1}{3(3^5)} - \frac{1}{6(3^7)} + Rest_{2,3} \\ &= 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{81} - \frac{1}{162} + \frac{1}{729} - \frac{1}{13122} + Rest_{2,3} \\ &\approx 1.08231 + Rest_{2,3}\end{aligned}$$

där

$$|Rest_{2,3}| \leq \frac{7}{24(3)^8} = 0.0000444546 \quad .$$

Beräkning av $(23)_{(p=2, N=10)}$ Vi beräknar även (25) för $N = 10$ och gör även detta med hjälp av miniräknare då beräkningarna snabbt blir mer omständliga vid högre N så

$$\begin{aligned}\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3(10^3)} - \frac{1}{2(10^4)} + \frac{1}{3(10^5)} - \frac{1}{6(10^7)} + Rest_{2,10} \\ &\approx 1.08232 + Rest_{2,10}\end{aligned}$$

där

$$|Rest_{2,10}| \approx 2.916666... \cdot 10^{-9} \quad .$$

Leonhard Euler bevisade även resultatet för denna summa

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

och beräknar vi denna kvot med miniräknare får vi att

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.08232$$

(Katz, 2009, s.622). Vi ser att våra approximationer

$$\begin{aligned}(p=2, N=3) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} &\approx 1.08231 + Rest_{2,3} \\ (p=2, N=10) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} &\approx 1.08232 + Rest_{2,10}\end{aligned}$$

även här har god noggrannhet vid låga N och p då resttermerna är mycket små.

4.4 Slutsats

I denna uppsats ville vi arbeta fram en effektiv metod för att approximera oändliga serier vilken även skulle ge god noggrannhet, det vill säga ha en mycket liten rest. Med hjälp av Bernoullipolynomen arbetade vi oss fram till Euler-Maclaurins summationsformel (19) vilken vi använde för att approximera de två oändliga serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad .$$

Formeln gav god noggrannhet redan vid små värden på N och p , då resttermerna var mycket små, vilket var positivt då effektiviteten snabbt blev lägre vid högre N i och med omständligare beräkningar.

5 Referenslista

Baselproblemet. (2017, 28 oktober). I *Wikipedia*. Hämtad 2018-01-14, från <https://sv.wikipedia.org/wiki/Baselproblemet> .

Bernoullital. (2017, 28 oktober). I *Wikipedia*. Hämtad 2018-01-14, från <https://sv.wikipedia.org/wiki/Bernoullital> .

Bernoulli polynomials. (2018, 15 januari). I *Wikipedia*. Hämtad 2018-01-31, från https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_polynomials .

Euler-Maclaurins formel. (2017, 1 oktober). I *Wikipedia*. Hämtad 2018-01-14, från https://sv.wikipedia.org/wiki/Euler-Maclaurins_formel .

Hyltén-Cavallius, C., & Sandgren, L. (1964). *Matematisk analys 1: För nybörjarstadiet vid universitet och högskolor* (5. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Hörmander, L. (1989). Välj specialarbete i matematik: idéer till specialarbeten i matematik för gymnasister : samlade som en del av FRN-projektet Information om högskolan i gymnasiet. I D. Laksov (Red.), *Euler-Maclaurins summationsformel och Bernoulliska polynom* (s. 146-150). Djursholm: Institut Mittag-Leffler.

Ireland, K.F. & Rosen, M.I. (1990). A classical introduction to modern number theory. (2. ed.) Berlin: Springer-Vlg.

Katz, V.J. (2009). A history of mathematics: an introduction. (3rd ed.) Boston: Addison-Wesley.