



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

**Sannolikhetslärans uppkomst - En genomgång från början fram till
1700-talets slut**

av

Sofia Cederberg

2018 - No K14

Sannolikhetslärans uppkomst - En genomgång från början fram till 1700-talets slut

Sofia Cederberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Paul Vaderlind

2018

Sannolikhetslärans uppkomst

En genomgång från början fram till 1700-talets slut

av

Sofia Cederberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Paul Vaderlind

2018

Sammanfattning

Detta självständiga arbete presenterar en historisk överblick av sannolikhetslärans uppkomst. Dess huvudfokus grundar sig från den allra första början och fram tills slutet av 1700-talet.

Innehåll

Inledning	6
Tidslinje – en översikt	8
Hasardspel	9
Medeltid – 400- till 1400-tal	12
Renässansen – 1400- till 1600- tal	14
1600- tal	17
Pascal och Fermat	17
Jacob Bernoulli	26
1700- tal	33
Vidare utveckling av sannolikhetsläran	38
Avslutning	39
Källor	40

Inledning

- Vad är sannolikheten att få par (endast ett par) i första given i ett pokerspel?
- Vad är sannolikheten att jag vinner om jag köper en trisslott?
- Borde jag ta ett paraply med mig när jag åker hemifrån? Hur stor är sannolikheten att det blir regn under dagen?

Detta är exempel hur sannolikhetsläran kan påträffas i vardagen. Sannolikhet är ett sätt att uttrycka en osäkerhet, hur stor chansen är att förutse eller undvika en händelse.

Vad innebär sannolikhet för mig och för dig? Är det samma eller har vi olika uppfattning om sannolikhetslära och dess innebörd? Detta är intressanta frågor att fundera på och Tobak [7] skriver inledningsvis några intressanta rader:

One reason that probability has proved so useful is that it allows us to be very specific about the chance that some event will, or will not, occur. We tend to think of these kinds of events as random, but the adjective random often tells us more about ourselves than about the actual event.

Säger alltså adjektivet *slumpvis* mer om dig eller mig, än om den faktiska händelsen? En intressant fundering att bära med sig under resan för sannolikhetslärans uppkomst. I detta arbete kommer en historisk överblick över sannolikhetsläran att presenteras. Perspektivet sträcker sig från sannolikhetslärans uppkomst fram till och med 1700-talets slut.

Sannolikhet definieras som förhållandet mellan gynnsamma utfall och alla möjliga utfall. Måttet på sannolikheten är tänkt som kvoten mellan antalet gynnsamma utfall och det totala antalet utfall, alltså ett positivt tal p sådant att $0 \leq p \leq 1$. Tre punkter om sannolikhet i modern tid:

- Sannolikheten att en given händelse ska inträffa samt att sannolikheten att händelsen inte ska inträffa, har alltid summan 1. Om p står för sannolikheten att en viss händelse ska inträffa, så är sannolikheten att händelsen inte inträffar $1 - p$.
- När två händelser är oberoende, så är sannolikheten att båda ska inträffa lika med produkten av deras individuella sannolikhet.

Här följer ett exempel med två oberoende händelser, A och B. Om sannolikheten att A ska inträffa är p och sannolikheten att B ska inträffa är q , så är sannolikheten att både A och B ska inträffa lika med $p \times q$.

- Vid tillämpning av kast med en äkta tärning så är varje kast oberoende av alla andra kast. En äkta tärning är en tärning där varje sida har samma sannolikhet att komma upp. Att kastet är oberoende kan förklaras genom att oavsett vilket utslag man får på det senaste kastet eller på någon serie av kast, så är sannolikheten för alla framtida kasts utslag oberoende av föregående resultat [7].

Tidslinje – en översikt

400 – Från uppkomsten, till tidig matematisk utformning

1400 – Viss teori om sannolikhet, vadslagning, intuitiva risker

Ingen teori om hur detta skulle eller kunde beräknas

1500 – Cardano skrev text om tärningsspel, men den publicerades inte förrän år 1663

1650 – Chevalier de Mere: ”Hur fördelas potten om spelet avbryts i förtid?”

Pascal och Fermat hjälptes åt via brevväxling att lösa frågan. Kallas för sannolikhetens födelse!

1654 – Huygens fick tillgång till brevväxlingen och använde detta som utgångspunkt i sin bok om beräkningar i hasardspel (1657)

Slutet av 1600 – Jacob Bernoulli - djupgående arbete om sannolikhet: publicerades 1713

Ars Conjectandi (konsten att gissa): Dagens s.k. klassiska sannolikhet

Detta mynnar sedan vidare till ”De stora talens lag”

1700 – Generalisering av sannolikhetsläran

Abraham de Moivre, Karl Fredrik Gauss

Hasardspel

De första historiska beläggen för att människan intresserat sig för spel och därmed sannolikhetsläran sägs vara de redskap, gjorda av sten och ben i olika färger, som arkeologer upptäckt. Stenarna och benbitarna var från 500 – 400 f.Kr. Med tanke på dess storlek var det mest troligt att dem användes vid spel eller som leksaker. Ett spel som barn spelade på den tiden, liknar spelet ”kula” som kan återfinnas i modern tid. De ritade en cirkel på marken och kastade benbitar i ringen. Den som vann spelets omgång belönades med en benbit [3].

Tidiga idéer som väckte intresse för sannolikheter var som sagt spel med tärningar, så kallade hasardspel. Namnet kommer från franskans *hasard* som betyder slump eller tillfällighet. Ett hasardspel är ett spel som beror på slumpen, inte på spelarens skicklighet. Idag vet vi att hasardspelandet förekom redan på 500 - 400 f.Kr. på grund av fynden av benbitarna. Talusbenet (spångbenet) från klövdjur (till exempel häst, ox, får och rådjur), kopplar vi idag starkt ihop med hasardspelet. Dessa talusben hade förmågan att hamna på endast fyra olika sätt, om benet kastades på en plan yta. I Egypten har man funnit gravar med rester av talusben, välpolerade och markerade samt resultattavlor på poängfördelningen i spelen [4].

4 poäng: den övre sidan av benet, bred och konvex

3 poäng: den motsatta sidan, bred och konkav

1 poäng: den laterala sidan, smal och platt

6 poäng: den motsatta sidan, lateral, smala och något hålig sida

Poängen 2 och 5 utelämnades [3].



Den empiriska sannolikheten baserad på ett kast med ett talusben uppskattas idag till 1/10 för att få en 1 eller en 6 och cirka 4/10 vardera för att slå en 3 eller en 4. Fyra talusben kastades samtidigt och visade då poängen 1, 3, 4 och/eller 6. Med de givna uppskattningarna, skulle sannolikheten för de olika kasten se ut som i tabellen nedan. Notera dock att denna givna sannolikhet är beräknad med användning av teori, som inte på långa vägar var uppfunnen när dessa sannolikhetsspel ägde rum för flera tusen år sedan [3].

				10000*sannolikheten för varje kast
(1^4)	(6^4)			1
(3^4)	(4^4)			256
(1^33)	(1^34)	(6^33)	(6^34)	16
(3^31)	(3^36)	(4^31)	(4^36)	256
(1^36)	(6^31)			4
(3^34)	(4^33)			1024
(1^23^2)	(1^24^2)	(6^23^2)	(6^24^2)	96
(3^24^2)				1536
(1^26^2)				6
(1^234)	(6^234)			192
(3^216)	(4^216)			192
(3^214)	(3^264)	(4^213)	(4^263)	768
(1^263)	(1^264)	(6^213)	(6^214)	48
(1634)				384

[3]

I spelet, kasta tärning, användes fyra stycken talusben och tabellen ovan visar på de olika utfallen med kast av de fyra benbitarna. (1^4) betyder att på de fyra stycken kastade talusbenen, blev det fyra styck- en av talet 1, (3^264) betyder två stycken av talet 3 och ett vardera av

talen 6 och 4 på talusbenen. Den bästa och svåraste kombinationen på kasten var (1634) och kallades för *venus*. Romarna och grekerna ansåg denna kombination så osannolik, att guden (eller gudinnan) *Venus* måste påverkat kasten, som resulterade i just detta utfall [3].

Talusbenen var den tidigaste varianten av en tärning och den äldsta tärningen, såsom vi känner den, är daterad till ca år 300 e.Kr. och var gjord av välbränd keramik. Två varianter av tärningar har hittats och de skiljer sig åt då motsatta sidorna i tärningarna har olika antal prickar. Tärningen som var funnen i Tepe Gawra (Irak) hade följande sidor

2 mot 3
4 mot 5
1 mot 6.

Den andra tärningen som var funnen i Indien hade sidorna

1 mot 2
3 mot 4
5 mot 6 [3].

Medeltid – 400- till 1400-tal

Under medeltiden baserades den största delen av samhällsekonomin på jordbruk. De tidiga civilisationerna, utvecklade sina kunskaper inom matematik, för att kunna lösa matematiska problem i samband med jordbruket, men även för bokföring, astronomi och för olika typer av konstruktioner [1].

De matematiska frågeställningarna som uppkom i och med jordbruket kan tänkas handlat om efterfrågan av jordbrukets grödor samt hur stor dess tillgång var. Räckte produktionen från jordbruket till att försörja hushållet? Andra tankar som jag personligen tror kunde koppla samman medeltidens matematiska problem med detta var vad som kunde påverka jordbrukets utdelning. Vilka aspekter var helt avgörande, vilka hade större eller mindre betydelse för jordbrukets resultat och vilka risker fanns det med olika tillvägagångssätt. Kopplar jag ihop dessa tankar med vad vi idag vet om sannolikhet, skulle detta kunna ligga till grund för hur tankarna kring risk, utdelning och delen som slumpen utgör, ha utvecklats.

Runt år 600 översattes Brahmaguptas matematiska verk, *Brahmasphutasiddhanta* från sanskrit till arabiska. Brahmaguptas stora bidrag till matematiken var att han introducerade en notering för ”ingenting” och detta hade relevans inför kommande utveckling av matematiken. Hans verk är det äldsta som behandlar en notering för ”ingenting” som ett självständigt ”tal”. Han introducerade även och tillämpade algebra för att beskriva matematiken [1]. Noteringen för ”ingenting” var väsentlig i det avseende att kunna utveckla den skriftliga matematiken, notationer och algebra.

Under medeltiden hade jordbruk och spel i underhållningssyfte vuxit fram och denna utveckling kan sammanfattas med ett par ord. De ord jag identifierat är; chans, antagande, gissningar, risker och tur. Det fanns alltså redan nu tankar som vi idag vet handlar om sannolikhetsläran, som på denna tid endast var tankar och funderingar över sitt hushåll eller hur jag personligen gynnas bäst i ett underhållningsspel.

Renässansen – 1400- till 1600- tal

Renässansen, betyder pånyttfödelse av det som redan har skett. Specifikt under denna tidsperiod började uppbyggnaden av den vetenskap som var baserad på observationer, orsaksförklaringar och matematik träda fram. Renässansens utveckling byggde till stor del inom den vetenskapliga grenen på att äldre grekiska och latinska texter återfunnits, efter att ha fallit i glömska efter Romarrikets fall.

Kunde det vara så att pånyttfödelsen, den ökade nyfikenheten, var en konsekvens av de återfunna grekiska och latinska texterna? Att samhället som sådant ville veta varför dessa texter återfunnits och vad de egentligen grundade sig på. Renässansen, pånyttfödelsens tid, syftade även till att individen frigjorde sig själv från kyrkan, hon blev mer självständig. De som var utbildade insåg att kyrkan inte besatt den enda rätta sanningen och det kan sägas att alternativa sanningar trädde fram [7].

Vidare under Renässansen utvecklades handeln i rask takt. De italienska köpmännen som handlade under medeltiden, skulle idag kallats för riskkapitalister. Dessa köpmän reste själva runt till platser långt borta i öst för att köpa varor som de inte hade tillgång till i Italien. När de återvände såldes dessa varor i hopp om att göra goda affärer med vinster. Köpmännen var inte i behov av att tillämpa matematiken, annat än att veta sina kostnader och inkomster för varje sjöresa. Under Renässansen ökade behovet av den matematiska tillämpningen i handeln, då köpmännen utvecklade dess omfattning. Köpmännen höll sig då hemma i Italien, medan inhyrda män utförde handelsresorna. Detta gjorde att köpmännen som höll sig kvar i Italien kunde sköta bokföringen och logistiken med resorna. Ju mer etablerade ett sådant sällskap med sjöresor och dess ”ekonomi” blev, desto mer likt ett företag

blev kompanierna. Köpmännen insåg att expansion av företagen krävde en ökad tillämpning av matematik, för att räkna på omsättningen av resorna och dess affärer [5]. Här fanns chansen för sannolikhetsläran att träda fram, med avseende på frågor som: var resorna lönsamma? Hur såg fördelningen ut mellan inkomster och utgifter? Hur skulle de räkna på eventuella risker för vinster och förluster av de fartyg som aldrig kom tillbaka?

Frågorna ovan kan kopplas till begreppet *aleatoriskt* kontrakt, ett avtal som föreskriver utbyte av ett för tillfället säkert värde mot ett framtida osäkert värde. Ett sådant kontrakt omfattade livräntor och sjöfartsförsäkringar där en viss summa betalades inför händelsen eller resan, i utbyte mot en okänd summa som skulle återlämnas vid ett senare tillfälle under vissa förutsättningar. För att kontraktet skulle vara "rättvist" hävdade matematikerna att man skulle kvantifiera risken på något sätt [6]. Idag kallar vi detta för försäkringar.

En man som levde under denna tid var Girolamo Cardano (1501-1576). Han skrev boken *Liber de Ludo Aleae* (1552) som publicerades år 1663. Detta verk var det första seriösa försöket att utveckla statistiska principer av sannolikhet, oddsen för olika utfall vid kast med tärning. Han beskrev effekten av att definiera odds som förhållandet mellan gynnsamma och ogynnsamma resultat. Alltså att sannolikheten för en händelse ges av förhållandet mellan gynnsamma och det totala antalet möjliga resultat. Han var även medveten om multiplikationsregeln för oberoende händelser (se s. 9, punkt 2), men var inte säker på vilka värden som skulle multipliceras.

Till en början beräknade han värdet genom att multiplicera oddsen, men insåg snart att det var felaktigt. Efter noggranna beräkningar i några enkla fall, kom han till insikt att det var sannolikheterna som måste multipliceras. Genom beräkning för ett fall där oddsen för framgång var 3 till 1 eller att sannolikheten för framgång var $\frac{3}{4}$, visade han att det för två på varandra följande spel, fanns 9 chanser för upprepad vinst och 7 annars. Därför var sannolikheten att lyckas två gånger i följd $\frac{9}{16}$, medan oddsen var 9 till 7 i favör. Han generaliserade och noterade sedan att för n upprepade försök i en situation med f

möjliga utfall och s framgångar, var de korrekta oddsen till förmån för s^n , lika med $f^n - s^n$ [6].

Liber de Ludo Aleae är ett av de första verk som skrivits ner och bevarats så att eftervärlden kunnat ta del av Cardanos tankar och idéer. Under Renässansen utvecklades notationerna för algebra, vilket var väsentligt för att kunna skriva ner matematiska resonemang på papper. Girolamo Cardano etablerade nya bevis av grunderna inom två av matematikens grenar, geometri och sannolikhet, detta var runt år 1552. Han ledde den matematiska vetenskapen in på spåret för experiment. Genom att observera spelborden så utförde han det första riktiga experimentet i matematikens sannolikhetslära [1].

Som tidigare nämndes frigjorde sig individen från kyrkan under Renässansen. Just detta, frigörelsen från kyrkan satt fortfarande som en del i Cardano och hans sätt att tänka. Han stod för nya tankar kring sannolikhet, men kunde inte helt släppa idén om att högre makter hade ett finger med i spelet när det kom till hans studier av att kasta tärning. Cardano påstod att: "I can as easily throw one, three or five as two, four or six" [7], alltså att det var 50/50 chans att få antingen en 1, 3, eller 5, som en 2, 4 eller 6, på en sexsidig tärning. Han relaterade tärningskastet till myntkastet, där endast två utfall fanns, ett gynnsamt och ett ogynnsamt. Idag vet vi, med matematiska grunder, att Cardano hade rätt i sitt antagande om sannolikheten [7].

1600- tal

1600-talet är den tidsepok som idag kallas för *sannolikhetslärans födelse*. Vad som ligger till grund för detta namn ska nu redas ut, men först en kort återblick av vad som karaktäriserat tidsperioden.

Under hela seklet stod resor och upptäckter i fokus. Krig och politik gick hand i hand och upplysningstiden var här. Man trodde på människans förnuft, att alla människor var kapabla att tänka själva som de individer de var. Detta gav i sin tur utrymme för teknik och vetenskap att blomma fram. Den naturvetenskapliga revolutionen fick sitt genombrott, det utfördes studier som undersökte vetenskapens olika områden på detaljnivå, man ville ha goda grunder och bevis för sin forskning. Isac Newton publicerade sitt stora verk om naturvetenskapens matematiska principer, som var och är en av tidens största avtryck i den matematiska historien. Men nu tillbaka till hur sannolikhetsläran träder fram under 1600-talet.

Pascal och Fermat

Två centrala vetenskapsmän som levde under 1600-talet var Blaise Pascal (1623-1662) och Pierre de Fermat (1601-1665) och vad dessa två män åstadkommit, anses ligga till grund för den vetenskapliga sannolikhetsläras uppkomst.

Båda männen gjorde många upptäckter inom ämnet matematik, utan att för den delen formellt vara matematiker. Det sägs att Pascal och Fermat båda var matematikamatörer. Matematiken på denna tid var begreppsmässigt svår och lösningarna till de matematiska problemen var tekniskt komplicerade. Fermat ventilerade därför sina tankar kring

matematik genom att skicka brev till andra framgångsrika matematiker.

Istället för brevväxling så utbytte Blaise Pascal sina matematiska tankar och idéer vid möten med tidens främsta matematiker i Europa. Han var medlem i en välkänd naturvetenskaplig förening och föreningen utgjordes av "likasinnade" som träffades för att diskutera vetenskapliga och matematiska problem. Föreningen träffades i Paris hemma hos den vetenskaps-, matematik- och musikintresserade prästen Marin Mersenne och föreningen namngavs därför *Mersenne Academy* [7]. De två männen Fermat och Pascal ville alltså, på sina olika sätt undersöka matematiken ner på detaljnivå, för att kunna förstå den samt utveckla dess resonemang.

Blaise Pascal träffade den franska adelsmannen Chevalier de Mere, en man som hade stor passion för hasardspel. Vid mötena mellan Pascal och de Mere diskuterades den matematiska grunden för vissa problem som var kopplade till spel, främst om hur potten skulle fördelas om spelet avbröts innan det nått sitt mål. För att få ökad synvinkel, fördjupade kunskaper och finna en lösning till problemet, så vände sig Pascal till Fermat. 1654 var året som den berömda brevväxlingen om hasardspel startade mellan Blaise Pascal och Pierre de Fermat.

The division of stakes

Two players agree to a game of chance. They wager equal amounts of money on the outcome. All money goes to the winner. The game begins but is interrupted before it is completed. One player is ahead when the game ends. How should the stakes be divided? [7]

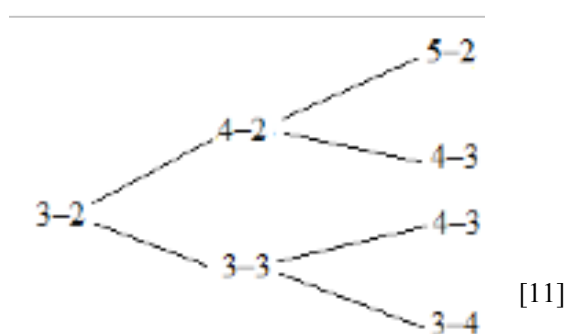
Den grundläggande idén till problemet om *uppdelningen av insatserna*, var att två spelare gick in med var sin lika stor insats i spelet. I ett läge då ena spelaren leder över den andra, beslutas det att spelet ska avslutas, alltså innan spelet nått sitt mål. Hur ska då insatserna fördelas spelarna emellan? De ska inte fördelas lika, eftersom den som leder har större chans att vinna hela spelet. Det finns dock ingen garanti för att det skulle vara den som leder, som i slutändan vinner. Insatser-

na bör delas efter rådande förutsättning, men hur skulle detta ske? Pascal och Fermats första insikt var att uppdelningen i första hand borde bero på de fortsatta möjligheterna i spelet, om det inte hade avbrutits. Av denna anledning så borde en spelare med 8 - 2-ledning, i ett spel till 10, ha samma chans att vinna som en spelare med 98 - 92-ledning, i ett spel till 100. Detta trots att intuitionen säger att det bör bli en jämnare match i spelet till 100.

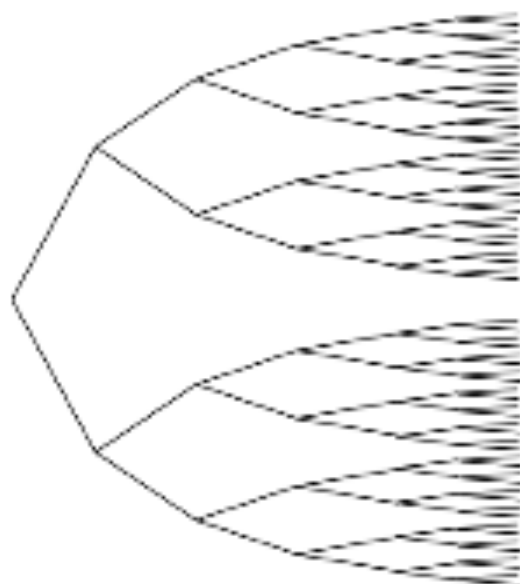
Problemet omfattar flera begrepp inom sannolikhetsläran och kan även ha inspirerats av idéer utanför spelområdet. Vissa vetenskapsmän anser att problemet om uppdelningen av insatserna grundade sig på bredare ekonomiska frågor. Under Renässansen utvecklade låntagare och köpmän olika kompanier. Redan då formulerades frågeställningar om tillgång, efterfrågan, lönsamhet och risker vid investering, vilket ledde sannolikheten in på ett nytt spår, ekonomi och försäkringar [7]. Det var dock nu, under 1600-talet som matematikerna sökte svar på samband och förklaringar till varför det skulle vara eller inte på ett visst sätt. Sannolikhetsläran som begrepp började nu växa fram, både i tankarna hos matematikerna, men även i och med brevväxlingen mellan Pascal och Fermat.

Breven som skickades mellan Pascal och Fermat löste flera versioner av spelproblemet om uppdelningen av insatserna. De började tillämpningen med två spelare och en tärning, sedan ökade de omständigheterna till tre spelare.

Vi tittar på ett exempel i ett spel på 7 rundor där det står 3-2. Fermat beräknade oddsen för respektive spelare att vinna, genom att skriva ner alla möjliga utfall i spelet.



Bilden ovan visar på vilka sätt de två spelarna kan vinna spelet efter 7 rundor. Utifrån denna 3-2 situation så kommer den som leder att vinna i tre av de fyra fallen. Av denna anledning så borde, enligt Fermat, den ledande personen få $\frac{3}{4}$ av insatsen om spelet avbryts när det står 3-2. Om problemet nu utökas, till att spelet avbryts när det står 1-0, i ett spel på sju rundor, så blir träd-diagrammet betydligt mer komplicerat.



[11]

Varje spelrunda har två olika utfall, antingen vinner A eller så vinner B omgången. Detta innebär i sin tur att det finns 2^6 möjliga kombinationer för de 6 följande rundorna i spelet. Vi introduceras nu för en ny notation, som utgår från hur många ytterligare vinster varje spelare behöver för att vinna det totala spelet, istället för antalet redan vunna omgångar. Om ett spel avbryts och A saknar a vinster och B saknar b vinster, så låter vi $e(a,b)$ notera A:s andel av den totala insatsen. Med samma resonemang för det generella fallet, så innebär det att de återstående $a+b-1$ rundorna har 2^{a+b-1} möjliga utfall. I dessa fall som är gynnsamma för A i förhållande till 2^{a+b-1} kommer då att ge A:s andel av den totala insatsen [5].

Blaise Pascal och Pierre de Fermats svarade även på frågor om hur stora oddsen var att slå ett visst tal på en tärning, åtminstone en gång i ett givet antal omgångar av kast. Specifikt diskuterade de värdet av ett kast i ett tärningsspel där en spelare åtar sig att kasta en 6 (d.v.s. minst en 6) i åtta omgångar av kast. Fermat påstod att efter att spelarna gjort upp om insatserna, skulle den spelaren som ska utföra kastet ha $1/6$ av den totala insatsen i ersättning för att inte göra det första kastet. Om spelarna därefter kom överens om att spelaren som skulle utföra kommande kast, inte ska genomföra det andra kastet, borde denne ha $1/6$ av de återstående insatserna som kompensation, d.v.s. $\frac{5}{36}$ av den totala insatsen.

Fermat kallar detta för kastets *värde* och konstaterar att resultatet överensstämmer med det som även Pascal kommit fram till. Alltså, värdet på det k :te kastet, i åtta omgångar av kast, blir

$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ för $k = 1, 2, \dots, 8$. Om en spelare ska ge upp spelet helt och hållet bör denne erhålla $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0,767$, som sedan multiplicerat med den totala insatsen (detta resultat ges inte av Fermat). Fermat erhöll värdet genom att multiplicera sannolikheten för att vinna omgången, med den totala insatsen.

Antag nu att en spelare gjort tre kast utan framgång. Vad är då värdet på det fjärde kastet? Fermat konstaterar att värdet, enligt hans princip är $1/6$, d.v.s. att kastet är värt $1/6$ av den totala insatsen. Han betonar att denna princip håller oavsett antalet misslyckade kast. Förmodligen menar han att värdet på de återstående fem kasten erhålls på samma sätt som för de totalt 8 kasten, alltså genom $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ för $k = 1, 2, \dots, 5$. Kompensationen en spelare bör få för att avbryta spelet när 5 kast återstår blir $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,598$, som sedan multipliceras med den totala insatsen. Om spelet avbryts efter m misslyckade kast, måste spelaren få $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{8-m}$ för $m = 1, 2, \dots, 7$ multiplicerat med den totala insatsen, som kompensation för att ge upp spelet. I modern ter-

minologi uttrycks detta resonemang som en geometrisk fördelning $p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, för $p = 1/6$ [5].

En geometrisk fördelning, är en sannolikhetsfördelning för antalet försök som måste göras *innan* försöket lyckas, då varje försök lyckas med sannolikheten p . Den geometriska fördelningen som Fermat och Pascal diskuterade anger sannolikheten att kast k är t.ex. en sexa och idag kallas den för första gången-fördelning. Sannolikhetsfunktionen är

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots [2]$$

och används till exempel vid $X =$ ”antalet kast till och med första sexan”, med en äkta tärning, som har sannolikheten $p = \frac{1}{6}$.

Pascal och Fermat skrev till varandra under ett par månader, gällande hasardspelen. Därefter slutade Pascal att intressera sig för matematik. Fermat gjorde efter ett par år ett försök att återuppta kontakten med Pascal, han skickade ett brev med förfrågan om att träffas, men Pascal avvisade erbjudandet. Ett par år senare hade de båda männen gått bort.

Pascals huvudsakliga bidrag från brevväxlingen kan sammanställas enligt följande: Vi antar situationen (a, b) , som kan följas av antingen $(a-1, b)$ eller $(a, b-1)$ och båda fallen är lika troliga, eftersom varje spelrunda endast har två möjliga utfall,

$$e(0, n) = 1 \quad \text{och} \quad e(n, n) = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$e(a, b) = \frac{1}{2}[e(a-1, b) + e(a, b-1)], \quad (a, b) = 1, 2, \dots$$

Och om vi nu tittar på ett par exempel så innebär detta att:

$$e(2, 1) = \frac{1}{2}[e(2-1, 1) + e(2, 1-1)] = \frac{1}{2}[e(1, 1) + e(2, 0)] = \frac{1}{4}.$$

$$e(3,1) = \frac{1}{2}[e(3-1,1) + e(3,1-1)] = \frac{1}{2}[e(2,1) + e(3,0)] = \frac{1}{8}.$$

$$e(3,2) = \frac{1}{2}[e(3-1,2) + e(3,2-1)] = \frac{1}{2}[e(2,2) + e(3,1)] = \frac{5}{16}.$$

$$e(4,1) = \frac{1}{2}[e(4-1,1) + e(4,1-1)] = \frac{1}{2}[e(3,1) + e(4,0)] = \frac{1}{16}.$$

$$e(4,2) = \frac{1}{2}[e(4-1,2) + e(4,2-1)] = \frac{1}{2}[e(3,2) + e(4,1)] = \frac{6}{32}.$$

Pascal jämförde dessa termer med termerna i hans aritmetiska triangel. Här är bilder på Pascals triangel, de första sex raderna:

1		$\binom{0}{0}$									
1	1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$								
1	2	1	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
1	3	3	1	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
1	4	6	4	1	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
1	5	10	10	5	1	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Pascals triangel är en framställning av binomialkoefficienter (förklaras senare i avsnittet) i form av en triangel. Triangeln tillämpas inom kombinatoriken och svarar på frågor av typen ”på hur många sätt..?”. Varje rad är ett element längre än föregående rad och varje elements värde är summan av de två ovanstående elementen (till höger och vänster, om dessa existerar). På detta sätt har varje rad en etta i början och i slutet. På rad 3 ser vi till exempel att det andra elementet är summan av de två (till höger och vänster) ovanstående elementen, $1 + 1 = 2$ och hela tredje raden består av ett element mer än den

andra raden. I den högra figuren tolkar man t.ex. symbolen $\binom{2}{1}$ som: på hur många sätt kan vi välja 1 element ur en mängd med totalt två element. Och generellt tolkas detta som: på hur många sätt kan vi välja k element ur en mängd med totalt n element, $\binom{n}{k}$.

Med ett praktiskt exempel kan hela raden tre visa alla kombinationer som kan uppstå när man singlar två mynt. En krona-krona, en klave-klave och två varianter av krona-klave.

Åter till situationen $e(a, b)$. Nämnarna i exemplen ovan har ett samband med summan för alla element i respektive rad i triangeln. Täljarna verkar vara summan av de b första elementen i den aktuella raden. Vi kan nu se följande mönster: Med tanke på situationen $e(a, b)$, andelen av den totala insatsen, och om $a + b = k$, så studerar vi raden k i Pascals triangel. Se följande exempel, för $e(3, 2)$ får vi:

$$\frac{1+4}{1+4+6+4+1} = \frac{5}{16},$$

vilket verkar stämma, enligt tidigare beräkningar.

Det som vi idag kallar för det ”förväntade värdet” har vi Pascal att tacka, när han visade att $e(a, b) = \frac{1}{2} [e(a-1, b) + e(a, b-1)]$. Idag skrivs detta som

$$E[X] = \frac{E[X|A] + E[X|B]}{2},$$

där,

X: A:s andel av den totala insatsen.

A: A vinner följande runda.

B: B vinner följande runda.

Det var i senare delen av brevväxlingen som Fermat erhöll de huvudsakliga idéerna och slutförde teorin om hur stor andel respektive spelare skulle inneha, vid avbrutet spel, vilket var $E[X]$ [5].

Under tiden som de brevväxlade och diskuterade problemen i hasardspelet, så gjorde de ett försök att tillämpa teorin i praktiken. Viktigt är nu att inse att de löste en uppsättning av isolerade problem i sannolikhet, de utvecklade aldrig en bred sammanhängande teori för ämnet. De lade grunden till sannolikheten, grunden för att kommande matematiker skulle kunna generalisera problemet [7].

Den kortsiktiga effekten som följde i och med Pascal och Fermats arbeten var diskussioner som spred sig mellan matematikerna i Paris. Christian Huygens (1629-1695) var en tysk matematiker som snabbt intresserade sig för dessa och tog del av resonemangen. Huygens intresserade sig för tärningsspelet och löste ett flertal av de problem som Pascal och Fermat redan löst. Det han bidrog med som är av relevans för sannolikhetslärans historia, var hans textböcker där han löste problemen i. Till skillnad från de tidigare nämnda breven så beskrev Huygens i dessa böcker varför vissa påståenden var sanna samt hur dessa nya idéer kunde tillämpas. Den funna sannolikhetsläran kunde nu nå en bredare publik än tidigare [7].

Christian Huygens har i sitt verk, *De Ratiociniis Ludo Aleae* (Om resonemang i tärningsspel), bland annat skrivit om värdet av ett spel:

"If I have equal chances of getting a or b , this is so much worth for me as $(a + b)/2$." [5]

Huygens utgår från tankarna kring ett lotteri, där varje spelare har lika stor chans att vinna och av den anledningen går varje spelare in med lika stor insats, x . För att göra varje spel rättvist, så går vinnaren av den totala insatsen med på att betala en viss summa till förlorarna. Spelets värde definieras som insatsen per deltagare i motsvarande lotteri. För att bevisa påståendet introducerade han ett lotteri med två spelare som var överens om att vinnaren skulle betala beloppet a till förloraren, så att vinnaren fick $2x - a$. Sätt att $2x - a = b$, då kommer varje spelares insats till lotteriet motsvara $x = (a + b)/2$ [5].

För fortsatt genomgång av sannolikhetslärans uppkomst, presenteras nu viktiga matematiska begrepp, relativ frekvens och binomialfördelning.

Den *relativa frekvensen* (h_n) beskrivs inom sannolikhetsläran som det antal gånger en viss händelse förekommer (S_n), delat med antalet försök (n). Ju fler försök som utförs, desto mer kommer den relativa frekvensen att stabilisera sig kring ett visst tal för ett utfall. Detta tal kallas sannolikheten för utfallet och det förutsätts att försöket upprepas på samma sätt. Beteckningen för den relativa frekvensen:

$$h_n = \frac{S_n}{n}.$$

Ett praktiskt exempel. En klass med 10 elever skriver ett prov. 3 elever har 4 rätt på provet. Den relativa frekvensen att en elev får 4 rätt blir:

$$h_{10} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30 \text{ } \%.$$

Det andra begreppet, *binomialfördelning*, innebär antalet sätt man kan välja k element på, från en mängd med n element. (Förklaras under avsnitt 1700-tal) och beräknas på följande sätt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Jacob Bernoulli

Fortsättningen av sannolikhetslärans tillväxt, efter Pascal och Fermats bortgång sägs till stor del utgjorts av den schweiziska matematikern Jacob Bernoulli (1654-1705). Han ingick i en familj med många matematiker, som verkat i flera generationer. Jacob Bernoulli sägs vara den första matematikern som förstod relevansen av att kunna räkna på sannolikhet samt att sannolikheten hade betydelse i andra områden, än endast spel baserat på slumpen [7]. Jacob Bernoulli skrev verket *Ars Conjectandi* (Om konsten att gissa) som var kommentarer han base-

rade utifrån Christian Huygens bok *De Ratiociniis Ludo Aleae*, då han var mycket imponerad av den. Det speciella med Bernoullis verk var att han förde sannolikhetsläran än mer åt de tillämpningar som Huygens tangerat. Bernoulli beskriver att han önskade visa att sannolikhetsteorin kunde tillämpas inom alla samhällets aspekter. Sannolikhetsteorin skulle kunna fungera som en noggrann metod för logiskt resonemang där det var brist på bevis, så som i rättssalen samt för moraliska domar. Han gjorde dock inga större framsteg inom dessa områden, men värt att belysa är att Bernoulli noterade att sannolikhetsläran kunde hjälpa till att förstå samhällets många områden, som låg utanför matematiken.

Jacob Bernoulli var den första att resonera kring båda halvorna av sannolikhetens problematik. Den ena sidan handlade om att utifrån sannolikheten förutsäga frekvensen och den andra sidan handlade om dess motsats; givet frekvensen, kunna härleda sannolikheten.

“The more observations that are taken, the less danger will be of deviating from the truth.” [5]

Citatet ligger till grund för de resonemang Bernoulli förde gällande *de stora talens lag*. Han tillade att detta var välkänt att det inte räckte med en eller två observationer, utan ett stort antal måste göras för att bestämma sannolikheten eller händelsen. *Ars Conjectandi* är därför en milstolpe i historien för sannolikhetsläran.

Bernoulli fortsätter:

“Something further must be contemplated here which perhaps no one has thought about till now. It certainly remains to be inquired whether after the number of observations have been increased, the probability is increased of attaining the true ratio between the number of cases in which some event can happen and in which it cannot happen, so that this probability finally exceeds any given degree of certainty; or whether the problem has, so to speak, its own asymptote—that is, whether some degree of certainty is given which one can never exceed.

However, lest these remarks be misunderstood, it must be noted that I do not wish for this ratio, which we undertake to determine by trials, to be accepted as precise and accurate (for then the contrary would result from this, and it would be the more unlikely that the true ratio has been found the greater the number of observations made); but rather, the ratio is taken in some approximation, i.e. it is bounded by two limits. Moreover, these limits can be set up as close together as one wishes" [5]

Bernoulli formulerar här den grundläggande frågan: finns det en teoretisk motsvarighet till det empiriska faktum som nämns ovan? Om så är fallet, så kan vi tillämpa beräkningarna av slumpen inom de fält där den relativa frekvensen existerar. Idag formuleras problemet enligt följande;

Betrakta n oberoende försök, alla med sannolikheten p för att en viss händelse ska inträffa och låt S_n benämna antalet lyckade försök. Enligt sannolikhetsläran så är S_n binomialt fördelade (fördelningen förklaras under avsnittet 1700-tal). Frågan är nu, vad säger sannolikhetsläran oss om den relativa frekvensen $h_n = \frac{S_n}{n}$?

Låt ε vara ett godtyckligt positivt tal och låt E ange händelsen $|h_n - p| \leq \varepsilon$. Det kan då visas att det finns ett tal δ sådant att $Pr(E) > 1 - \delta$ då $n > n(p, \varepsilon, \delta)$. Talet ε kan antas så nära noll som man önskar. Detta innebär att h_n konvergerar mot sannolikheten p , då n går mot oändligheten.

Den relativa frekvensen h_n närmar sig alltmer sannolikheten p , ju större antal oberoende försök, n , som utförts. Genom att upprepa försöken får man ett närmevärde till sannolikheten p , och det värdet blir bättre och bättre ju fler försök som utförs, de stora talens lag [5].

I beviset för *de stora talens lag* betraktar Bernoulli prövningen med $t = r + s$ som lika sannolikt, som prövningen med r gynnsamma utfall, så att $p = \frac{r}{r+s}$. Han bevisade att h_n konvergerar mot sannolikheten p , eller så som han uttryckte det, att vi med säkerhet kan säga att

h_n inte avviker från p , om n är tillräckligt stort. Utan vidare diskussion föreslog Bernoulli att man kunde använda den relativa frekvensen av en händelse för att beräkna sannolikheten inom andra användningsområden, som t.ex. inom statistik och försäkringar. Detta, endast efter ett begränsat antal gjorda försök. Jacob Bernoulli började beviset med ett numeriskt exempel till $p = \frac{1}{2}$, följt av ett generellt bevis för $p = \frac{1}{2}$, för att slutligen utveckla ett bevis för den generella sannolikheten $p = \frac{r}{r+s}$.

Bernoullis egna formulering om sannolikheten lyder:

“It must be shown that so many observations can be made that it will be c times more probable than not that the ratio of the number of favorable observations to the total number of observations will be neither larger than $(r + 1)/t$ nor smaller than $(r - 1)/t$.” [5]

Olikheten

$$\frac{r-1}{t} \leq h_n \leq \frac{r+1}{t},$$

kan skrivas om som

$$|h_n - p| \leq \frac{1}{t}.$$

Bernoullis $\frac{1}{t}$ går mot ϵ och $\frac{1}{1+c}$ går mot δ .

Jämför man Bernoullis formulering av teoremet med hans tidigare uttalande (som citerats tidigare), så kan man förstå hans gränser. Ovan nämns att kvoten begränsas av två gränser som kan antas så nära varandra som man önskar, så det var naturligt för Bernoulli att välja den övre och undre gränsen så nära varandra som möjligt, alltså till $(r + 1)/t$ och $(r - 1)/t$, då r och t är heltal.

Bernoullis sats (*De stora talens lag*) kan tolkas som medelvärde av ett stort antal oberoende observationer, om försöket utförs ett oändligt antal gånger. Väldigt förenklat kan teoremet sägas motsvara uttrycket ”Det jämnar ut sig i det långa loppet”, under vissa omständigheter.

Bernoullis sats: Låt r och s vara två positiva heltal och sätt $p = \frac{r}{r+s}$ och $t = r + s$. För något positivt reellt tal c , har vi

$$Pr\left(|h_n - p| \leq \frac{1}{t}\right) > \frac{c}{1+c},$$

för $n = kt$ som är tillräckligt stort, d.v.s. för $k \geq k(r, s, c)$ och/eller $k \geq k(s, r, c)$, där $k(r, s, c)$ betecknar det minsta positiva heltal som uppfyller

$$k(r, s, t) \geq \frac{m(r+s+1)-s}{r+1},$$

där m betyder det minsta positiva heltalet som uppfyller

$$m \geq \frac{\ln[c(s-1)]}{\ln\left[\frac{(r+1)}{r}\right]}.$$

Om p är given, så kan vi välja t så stort vi vill, så att intervallet för den relativa frekvensen $h_n = \frac{S_n}{n}$ blir godtyckligt liten. c representerar hur många gånger mer sannolikt det är att händelsen inträffar, än inte. k och n är linjära funktioner i $\ln c$, vilket betyder att det vänstra ledet i $Pr\left(|h_n - p| \leq \frac{1}{t}\right) > \frac{c}{1+c}$ går mot 1, då c och n går mot oändligheten [4].

Vad kan då sägas om *De stora talens lag*, med det enda exemplet som Bernoulli presenterade?

Låt oss betrakta n dragningar från en urna med svarta och vita stenar med förhållandet 3: 2. I teoremet kan vi därför välja (r, s) som (30,20), (300,200) etc. beroende på vilka gränser vi väljer för den relativa frekvensen, h_n . Bernoulli valde att det skulle finnas 30 vita

stenar, $r = 30$ och 20 svarta stenar, $s = 20$, i urnan. Utifrån citatet ovan samt den tidigare presenterade olikheten

$$\frac{r-1}{t} \leq h_n \leq \frac{r+1}{t},$$

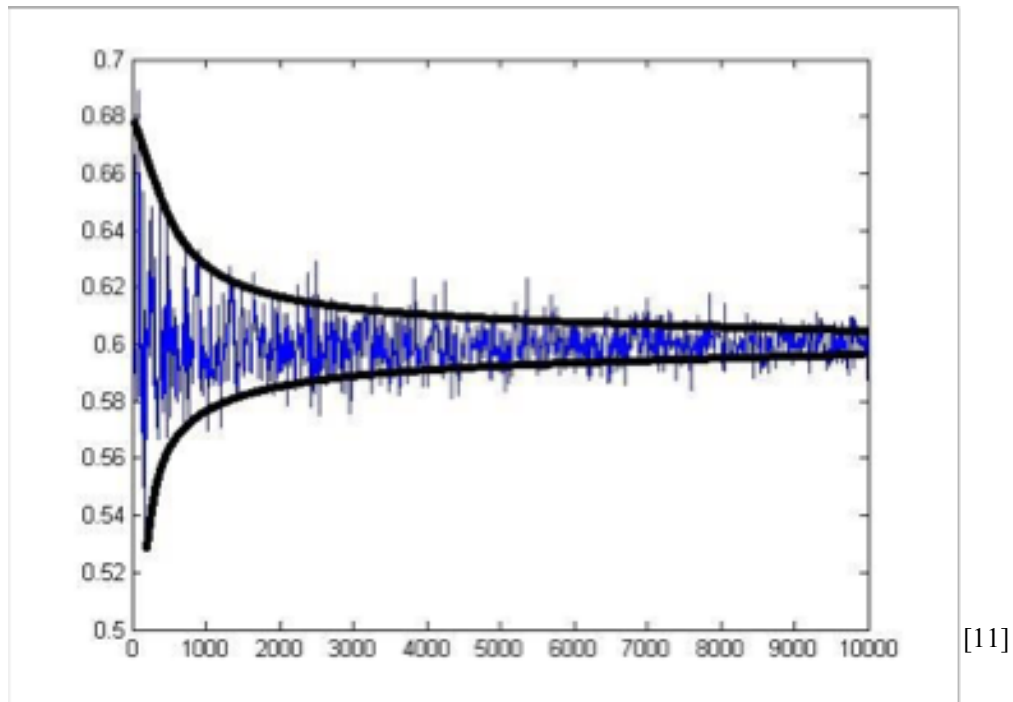
används värdena och erhåller

$$\frac{29}{50} \leq h_n \leq \frac{31}{50}.$$

Att välja $c = 1000$ i Bernoullis sats ger en säkerhet på $1000/1001$ att olikheten gäller. Från olikheterna för k och m i satsen kunde Bernoulli beräkna värdena $m = 211$, $k = 511$ och $n = 25550$. Sammanfattningsvis – vid 25550 observationer, är det åtminstone 1000 gånger större sannolikhet att h_n faller innanför, än utanför, det givna intervallet [5].

Figuren nedan tydliggör betydelsen av Bernoullis teorem. I en mängd finns det totalt 50 element och även i detta fall 30 vita stenar och 20 svarta stenar. Vi plockar en sten i taget utav de totalt 50 stenarna, utan att på förhand veta vilken, och lägger sedan tillbaka den i urnan. Detta gör vi ett bestämt antal gånger, exempelvis mellan 10 och 10000 gånger. Efter varje gång vi plockat en sten (≥ 10 gånger) ser vi på förhållandet mellan antalet plockade vita stenar och det totala antalet stenar. Enligt *De stora talens lag*, borde sannolikheten att plocka en vit sten från urnan närma sig 0,6 ju fler gånger vi slumpartat väljer en sten från urnan, $\frac{30}{30+20} = \frac{30}{50} = 0,6$.

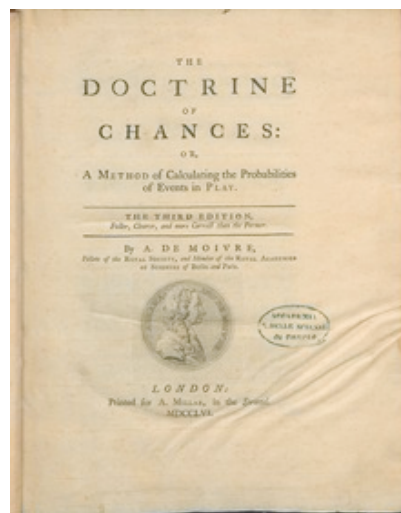
Figuren visar tydligt en avsmalnande form, med mindre och mindre avvikelse från 0,6, då antalet gånger man slumpmässigt väljer en sten ökar.



Sammanfattningsvis, under 1600-talet var det alltså stort fokus på att utveckla matematiska resonemang och formuleringar av spelen som var baserade på slumpen. Generella metoder och bevis växte fram bland denna tids matematiska studier.

1700- tal

Fransmannen Abraham de Moivre (1667-1754) var en matematiker som var verksam i England och hans stora bidrag till sannolikhetslärans historia var *The Doctrine of Chances* och den publicerades år 1756.



[10]

Med sitt intresse för matematik blev det med tiden så att han lärde känna många stora matematiker, så som Isac Newton. Liksom Jacob Bernoulli var de Moivre fascinerad av Christian Huygens verk *De Ratiociniis Ludo Aleae* och han inledde sitt eget verk med kommentarer kring denna. Han skrev om chanser i spel, deras problematik och dess lösningar och han ville förstå dessa lösningar i problem efter problem. De flesta av problemen som beskrevs i verket var långa, detta på grund av den bristande algebraiska noteringen, allt som stod beskrivet gjordes i fri text, istället för med formler.

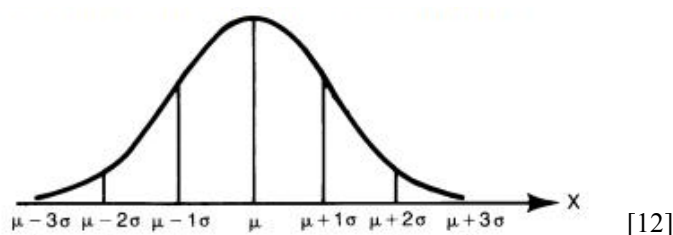
De Moivre introducerade en mycket viktig och välkänd idé; den vi idag kallar för normalkurvan (Bell-kurvan). Hans upptäckt stämde bra överens med det generella konceptet av sannolikhetsläran, som den var förstådd under denna tid. *The Doctrine of Chances* anses vara en god referens för att förstå 1700-talets sannolikhetslära [7].

En normalkurva, med dess normalfördelning, är en av de vanligaste sannolikhetsfördelningarna. En normalfördelad variabel antar ofta värden som ligger nära medelvärdet och som sällan har stor avvikelse. Om en slumpvariabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

där $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ och $\sigma > 0$

sågs X vara normalfördelad vilket idag skrivs som $X \sim N(\mu, \sigma)$. μ betecknar normalfördelningens väntevärde och σ betecknar dess standardavvikelse. För det allmänna fallet ser normalfördelningen ut enligt figuren nedan



Väntevärdet, μ , kan vi förstå ur figuren eftersom sannolikhetstätheten väger jämnt i den punkten. Så gott som hela sannolikhetsmassan finns inom intervallet $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ och ungefär 95 procent finns i intervallet $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ [2].

För att förstå och kunna tillämpa normalkurvan eller även kallad normalfördelningen, ska vi bekanta oss med ett annat välkänt teorem, nämligen binomialfördelningen. Blaise Pascal får i många fall stor ära

i att ha lagt grunden till binomialfördelningen, vilket till viss del är felaktigt. Det fanns andra innan honom som kommit fram till liknande resultat, fler hundra år tidigare. Vikten som ligger i Pascals arbete är hans systematiska framställning och relaterade tillämpningar.

Binomialfördelningen uttrycks i modern terminologi som:

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

där $\binom{n}{k}$ beräknas som

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Utvecklingen av binomialfördelningen ger:

$(p + q)^n = (p + q)(p + q) \dots (p + q)(p + q)$, med n stycken $(p + q)$ termer.

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Om vi studerar $(1 + x)^n$ med hjälp av binomialfördelningen och fokuserar specifikt på fallen $n = 1, 2, 3, 4, 5$ så ser vi följande:

$$1 + x$$

$$1 + 2x + x^2$$

$$1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

Här representerar $\binom{n}{k}$, koefficienten framför x^n -termen i utvecklingen av $(1+x)^n$. Koefficienterna i utvecklingen ovan överensstämmer med Pascals triangel, för fallen $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Binomialfördelningen hjälper oss att svara på frågor av karaktär ”Om ett vanligt mynt kastas 100 gånger, hur stor är då sannolikheten att exakt 50 av dessa landar med klave uppåt?”

X: 50, slumpvariabeln som motsvarar antalet klave.

p: 0,5, sannolikheten att händelsen inträffar.

q: $1-p = 0,5$, antalet icke-gynnsamma utfall.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

som i detta exempel ger:

$$P(X = 50) = (0,5)^{50} * (1 - 0,5)^{50} = 0,795892373872$$

Om vi utökar frågan till: ”Om ett vanligt mynt kastas 2000 gånger, hur stor är sannolikheten att minst 1100 av dessa visar klave?” så skulle det ge:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1100}^{2000} \binom{2000}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2000-k} =$$

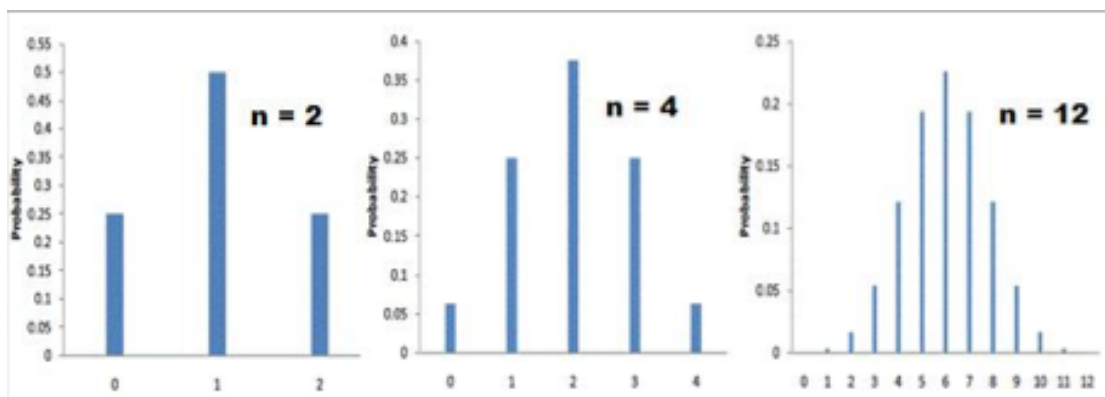
$$\sum_{k=1100}^{2000} \binom{2000}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2000}.$$

Detta satte fart på upptäckten av normalfördelningen, en upptäckt som ligger till stor grund för hur vi tillämpar dessa algoritmer idag. Flera matematiker efter de Moivre har utökat tillämpningen av normalfördelningen och insett dess användbarhet i naturliga situationer. Carl

Friedrich Gauss (1777-1855) upptäckte bl.a. fördelningens användbarhet för beskrivning av mätfel.

Abraham de Moivre utvecklade, i *The Doctrine of Chances*, kunskaperna om binomialutvecklingen av $(p + q)^n$ genom att analysera händelserna när ett vanligt mynt kastades upprepade gånger. Viktigt att belysa från hans verk är att det framgår att han härledde händelser som var så beroende av slumpen, att sannolikheten för gynnsamma/icke-gynnsamma resultat, var lika. Han ville hitta en funktion som approximerade formen, när antalet binomiala händelser (myntkast) ökade, med en kontinuerlig kurva. Först då skulle han på ett betydligt enklare sätt än tidigare, kunna beräkna summan som motsvarade frågeställningen ”Om ett vanligt mynt kastas 2000 gånger, hur stor är sannolikheten att minst 1100 av dessa visar klave?”. De Moivre ville hitta en kontinuerlig kurva för alla tal, inte bara för positiva heltal. När antalet myntkast ökar, så träder normalfördelningskurvan än tydligare fram. Skulle antalet myntkast utökas till alla tal (vilket dock inte är möjligt) skulle en kontinuerlig kurva kunna framställas.

Nedan visas tre diagram över sannolikheten att det blir klave när ett mynt kastas 2, 4 och 12 gånger. Vid ökat antal kast, ser vi hur en kurva träder fram, normalkurvan.



[11]

Vidare utveckling av sannolikhetsläran

Sannolikhetslärans utveckling under 1700-talet ändrade riktning, från vad den tidigare karaktäriserats av, chanser i spel. Utvecklingen innefattade att matematikerna förstod att sannolikhetsläran kunde ses som ett verktyg inom vetenskapen. Det fanns nu ett ökat behov av att tillämpa sannolikhet. Bakterieläran (läran om hur bakterier påverkar överföring av sjukdomar) utvecklades inte förrän på 1800-talet och under 1700-talet vad det många som dog i denna tids olika sjukdoms-epidemier, utan att man visste hur de spreds. Att välja det effektivaste tillvägagångssättet för att bekämpa dessa epidemier, baserat på dess biologiska karaktär, var därför svårt. I brist på fakta om sjukdomarna, tog matematikerna som var intresserade av folkhälsan till teorin för sannolikhetsläran. Detta i ett försök till att finna den effektivaste bekämpningen mot sjukdomarna. Detta var ett steg på vägen och ju mer matematikerna förstod och lärde sig om sannolikhetsläran, desto bredare spektrum tillämpades det inom. Matematikerna tillämpade nu sannolikhetslära för att beskriva processer och fenomen inom vetenskapens många områden [7].

Utvecklingen under dessa århundraden har alltså gått från isolerade problem, som endast var teorier matematiker emellan, till att de antecknats och spridits vidare, till att nu även kunna tillämpas inom andra områden än matematiken och i detta specifika fall, spel med chans.

Approximately two centuries separated Cardano's tentative musings about probability and the importance of luck and de Moivre's confident calculations and bold assertions about the nonexistence of luck. During this time Pascal, Fermat, and Bernoulli discovered new types of problems and developed important new concepts in their search for solutions [7].

Många stora matematiker gjorde betydande bidrag i vidareutveckling av sannolikhetsläran, t.ex. Carl Fredrik Gauss, detta var mot början av 1800-talet.

Avslutning

Inledningsvis ställdes frågan om adjektivet *slumpvis* säger mer om dig eller mig, än om den faktiska händelsen? Utifrån vad denna uppsats redogjort för så skulle jag säga att till en början sade slumpen mycket om individen, för att sedan låta händelsen stå i fokus. Från det att människan ansåg att gudarna och spelarens inställning till spelet avgjorde utgången i exempelvis ett tärningskast, till att generella metoder och bevis började ta form. Allt tar sin tid, så även sannolikhetsläran, men det var under 1600-talet som denna matematik tog stora framsteg. Mycket av dessa upptäckter använder vi även idag.

Källor

- [1] Beck, M, Kewell, B. (2014): Risk: A Study of Its Origins, History and Politics. World Scientific.
- [2] Britton, B, Garmo, H. (2002): *Sannolikhetslära och statistik för lärare*. Studentlitteratur AB, Lund.
- [3] David, F. N. (1962): *Games, gods and gambling*. Hafner publishing company New York. p. 1-179
- [4] Hacking, I. (2006): *The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction, and statistical inference*. 2nd ed. Cambridge University Press. p. 1-10
- [5] Hald, A. (1990): *A history of probability and statistics and their applications before 1750*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. p. 28-81, 220-275
- [6] Katz, V. J. (2009): *A history of mathematic*. 3rd ed. Pearson Education, Inc. p. 383-583
- [7] Tobak, J. Ph.D. (2004): *Probability and statistics: The Science of Uncertainty*. Facts on File. p. 1-45
- [8] http://johnquincy.blogspot.se/2012_09_01_archive.html
- [9] https://www.google.se/search?biw=1280&bih=614&tbm=isch&sa=1&q=pascals+triangel&oq=pascals+triangel&gs_l=psy-ab.3...1096307.1100849.0.1101361.4.3.0.0.0.650.837.1j1j5-1.3.0....0...1.1.64.psy-ab..1.1.129...0j0i10i30k1j0i30k1.7gfX_illpIo#imgrc=
- [10] https://en.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre

[11] Egen figur. Microsoft Word 2011

[12]https://www.google.se/search?biw=1280&bih=613&tbm=isch&sa=1&ei=noINWrPdG42TkWx36Ycg&q=normalf%C3%B6rdelning&oq=normalf%C3%B6rdelning&gs_l=psy-ab.3..0l10.13164.15604.0.15780.15.15.0.0.0.118.1392.12j3.15.0....0...1.1.64.psy-ab..0.15.1382...0i24k1j0i67k1j0i30k1.0.8VgguDv8NUU#imgsrc=y4aGAxf5lG9DM: