SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lindemann-Weierstrass sats

av

Ellen Selling

2018 - No K25

Lindemann-Weierstrass sats

Ellen Selling

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2018

English abstract

In this thesis Lindemann-Weierstrass theorem will be discussed. The theorem, its proof and some of its consequences will be explained.

Lindemann-Weierstrass theorem is in transcendental number theory useful to determine if some numbers are transcendental. One of the consequences of this result is that the classical constants pi and e are transcendental.

The purpose with this thesis is to explain the theorem, the proof and the consequences in such a way that it could be easily understood by a reader who studied mathematics about one year at a university level.

This will be done by explaining the background knowledge needed to understand the theorem and go through the lemmas needed for the proof of the theorem.

Förord och tack

Detta arbete utgör ett examensarbete om 15 poäng vid matematiska institutionen på Stockholms Universitet.

Jag vill tacka min handledare Rickard Bögvad som föreslog ämnet och guidade mig genom arbetet. Jag vill även tacka Håkan Granath som granskade arbetet och kom med bra återkoppling.

Innehåll

1 Inledning

Denna uppsats kommer att förklara vad ett transcendentalt tal är, vad det inte är samt hur man kan konstruera sådana tal.

Vi kommer även att behandla Lindemann-Weierstrass sats, då man från denna kan bevisa att de mer kända transcendentala talen, så som π och e, är transcendentala.

Sats 1.1 (Lindemann-Weierstrass sats)**.** *För olika algebraiska tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ och nollskilda algebraiska tal $\beta_1, \ldots, \beta_n$, har vi att*

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0.$$

Sedan grundskolan har vi lärt oss att dela upp tal i grupper (mängder). Från de naturliga talen, $\mathbb{N}$, heltalen, $\mathbb{Z}$, de rationella talen $\mathbb{Q}$, de reella talen $\mathbb{R}$ till de komplexa talen $\mathbb{C}$. Man kan faktiskt formulera en mängd tal nästan precis hur man vill, "Mängden av alla negativa tal delbara med tre", "mängden av alla tal med en tvåa på andra decimalplatsen i bas 5", "Mängden av alla tal som drogs på lotto förra veckan" och så vidare. Den här uppsatsen kommer att behandla en mängd av tal, de transcendentala talen. De transcendentala talen är den delmängden till de komplexa talen av de tal som inte är ett nollställe till ett rationellt polynom.

Uttrycket **transcendentalt tal** kommer från rot-ordet trans vilket härstammar från det latinska ordet transir vilket betyder "gå över" eller "överskrida". Mängden har fått detta namn då talen "överskrider" de algebraiska talen (alltså de talen som är nollställen till ett polynom med rationella koefficienter).

Syftat med den här uppsatsen är att förklara Lindemann-Weierstrass sats och dess bevis så att den kan förstås av någon som läst ett år matematik på universitet.

Uppsatsen är främst baserad på boken "Transcendental number theory" av Alan Baker. Övriga böcker som uppsatsen baserats på är listade i referenserna.

2 Historia

"Läran om transcendentala tal, som har sitt ursprung i så varierande källor som den klassiska grekiska frågan angående cirkelns kvadratur, de elementära undersökningarna av Liouville och Cantor, Hermites undersökningar om den exponentiella funktionen och Hilberts kända lista med 23 problem, har nu utvecklats till en fertil och omfattande teori som berikar vitt spridda grenar inom matematiken." (Baker, 1975)

Trots att den transcendentala talteorin är en relativ ung gren inom matematiken är den spridd över många av matematikens olika grenar. Det finns därmed otroligt mycket händelser som hade platsat i en historisk bakgrund, men vi får tyvärr avgränsa oss till de händelser som står i någon form av nära anknytning till uppsatsens ämne.

2.1 Approximering med rationella tal

Det matematiska området transcendental talteori utformades först på 1900-talet. Man kan dock spåra formuleringar med problem som rörde området långt bakåt i tiden och när relaterade områden hade fått mycket uppmärksamhet århundrandet innan. Begreppet transcendentala tal, i den bemärkelsen vi har idag, användes, vad vi vet, först av Euler då han, 1748, sin bok " Introductio in analysin infinitorum" påstod att a^b, givet att a, b är irrationella, algebraiska tal och $a \neq 0, 1$, måste vara transcendentalt. Det skulle dock dröja ända fram tills 1900-talet innan detta kom att bevisas.

Att approximera irrationella tal med rationella tal har länge varit av intresse inom matematiken och visar sig ha nära anknytning till transcendentala tal. Joseph Liouville satte, 1844, upp en olikhet som visade hur bra ett icke rationellt, algebraiskt tal kan approximeras med ett rationellt tal;

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^d}$$

där d är graden för α, med talets grad menas graden på det minimal polynom som har α som nollställe, och $c > 0$ är någon konstant som beror på α. Det Liouville egentligen säger är att det finns en gräns för hur bra en approximation av ett algebraiskt tal som inte är ett rationellt tal kan bli. Detta gav tillräckliga kriterier för att ett tal skulle vara algebraiskt, vilket medförde tillräckliga krav för att ett tal skulle vara transcendentalt. Liouville blev därmed först med att visa att transcendentala tal faktiskt existerar och utifrån detta kriterium kunde han även konstruera en mängd av transcendentala tal, vilka vi idag kalla för Louivilles tal.

Som en koppling till detta uppkom problemet med att bestämma en konstant

$\theta = \theta(d)$ sådant att;

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\theta+\varepsilon}}$$

endast har ändligt antal lösningar för $\varepsilon > 0$ och ett oändligt antal lösningar för $\varepsilon < 0$. Thue var först, i början av det 1900-talet att minska storleken av konstanten och fick då exponenten $d/2 + 1 + \varepsilon$. Detta generaliserades av Siegel som visade att exponenten kunde tas som $2\sqrt{d} + \varepsilon$, och förmodade att $2 + \epsilon$ även skulle gå. Det sistnämnda visades senare av Klaus Roth 1955, vilket är en del i motiveringen till att han gavs Fieldmedaljen 1958. Dessa resultat gav upphov till ytterligare en mängd tal som kunde visas vara transcendentala, men kriteriet räckte inte för att visa transcendentaliteten av exempelvis e och π.

2.2 Klassiska konstanter

Frågan angående huruvida de klassiska konstanterna e och π är algebraiska eller transcendentala fanns långt innan Liouville visade att de transcendentala talen ens existerade. Framförallt var detta intressant för talet π då detta skulle kunna bevisa huruvida problemet med cirkelns kvadratur hade en lösning eller inte, vilket även de grekiska matematikerna sysselsatte sig med (detta problem kommer behandlas senare i uppsatsen).

Charles Hermite fastställde 1873 transcendentaliteten för basen till naturliga logaritmer, e, i sin memoar med titeln "Sur la Function Exponentielle". Ferdinand von Lindemann utvecklade sedan Hermites arbete till att inkludera e^α för algebraiska α. Vilket mer specifikt gav följden att även π var transcendentalt och därmed bevisades att det gamla grekiska problemet med cirkelns kvadratur var omöjligt. Arbetet gjort av Hermite och Lindemann förenklades sedan av Karl Weierstrass 1885, och vidareförenklades därefter av David Hilbert, Adolf Hurwitz och Paul Gordan 1893. Beviset som följer i den här uppsatsen är skriven i den stil som användes av dessa sistnämnda matematiker.

2.3 Transcendentaliteten för logaritmer

Problemet med transcendens eller rationaliteten för logaritmer, med rationell bas, av rationella tal, kan spåras tillbaka till Euler 1748. Hilbert presenterade ett motsvarande problem i en betydligt mer generell form som nummer 7 i hans kända lista med 23 problem på den Internationella Kongressen för Matematiker i Paris 1900. En analog formulering av frågan är huruvida α^β är transcendentalt för något $\alpha \neq 0, 1$ och något irrationellt β, problemet kallas idag för Euler-Hilbert problemet.

De första framstegen med Euler-Hilbert problemet gjordes av Alexander Gelfond 1929, då han bevisade att α^β är transcendentalt för något algebraiskt tal $\alpha \neq 0, 1$ och något kvadratiskt irrationellt β. Detta implicerade specifikt att $e^\pi = (-1)^i$, som idag är känd som Gelfond-Schneider-konstanten, är transcendentalt. Metoden som användes i detta beviset var dock inte lämpligt för att lösa

problemet för mer generella exponenter β. 1934, löstes problemet fullständigt utav Gelfond och Theodor Schneider, oberoende av varandra.

Alan Baker förmodade att en generell analog sats med godtycklig mängd logaritmer av algebraiska tal borde hålla. Detta bevisade han 1966, detta bevis hade kapacitet för en stor mängd applikationer och Baker tilldelades Fieldsmedaljen 1970.

2.4 Ett öppet problem

Ett av de stora och fortfarande öppna problemen inom transcendental talteori är Stephen Schanuels förmodan som lyder:

Om $x_1, \ldots, x_n$ är linjärt oberoende över $\mathbb{Q}$ så är minst n av de $2n$ talen $x_1, \ldots, x_n, e^x_1, \ldots, e^x_n$ algebraiskt oberoende.

Schanuels förmodan skulle, ifall den visas vara sann, generalisera de flesta kända resultaten inom transcendental talteori. Ty, väljer man talen så att $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ är algebraiska återfås Lindemanns sats. Väljer man däremot $e^\alpha_1, \ldots, e^\alpha_n$ algebraiska återfås Bakers sats. Det skulle också kunna visas huruvida kombinationer av redan kända transcendentala tal är transcendentala eller ej, exempelvis;

$$e + \pi, \quad \log(\pi), \quad \pi^\pi, \quad \log(\log(2))$$

Vilka är tal som vi idag tror är transcendentala, men inte ännu vet.

3 Algebraiska tal

Det enklaste sättet att beskriva ett **transcendentalt tal** är att säga att det är ett tal som inte är ett **algebraiskt tal**.

Definition 3.1. *Ett tal som inte är algebraiskt kallas* ***transcendentalt****.*

Det är därför viktigt att förstå vad ett algebraiskt tal är och vad för egenskaper de har för att förstå vad ett transcendentalt tal är. Vi börjar därmed med att titta på de algebraiska talen. Algebraiska tal definieras enligt följande:

Definition 3.2. *Ett* ***algebraiskt tal****, α, är ett komplext tal som är en rot till ett noll-skiljt envariabelspolynom med rationella koefficienter. Med andra ord är det en rot till en ekvation på formen:*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Där talen $a_0, a_1, \cdots, a_n$ är rationella heltal och $a_0 \neq 0$.

En egenskap hos de algebraiska talen är något vi kalla grad.

Om $P = P(x)$ är ett polynom av grad n och P är irreducibelt, det vill säga att P inte är en produkt av flera polynom med rationella koefficienter, så är en lösning till $P(x) = 0$, vi kallar denna α, ett algebraiskt tal och man säger då att α har **graden** n.

Definition 3.3. *Givet ett algebraiskt tal, α, så finns det ett unikt moniskt polynom (med rationella koefficienter) av lägsta grad som har α som rot. Detta polynom kallas ett minimalpolynom. Om polynomet har grad n, då säger man att α är av* ***grad*** *n.*

Definition 3.4. *Ett* ***moniskt*** *polynom är ett polynom vars högstagradskoefficient är 1.*

Exempel 1. Här följer några exempel på moniska och icke moniska polynom.

$x^4 - 7x^2 + 3$	Moniskt
$3x^2 + x^9 - 4x + 7$	Moniskt
$x^3 + \sqrt{2}x + \pi$	Moniskt
$5x^2 + 3x + 1$	Inte moniskt

Ett begrepp kopplat till moniska polynom och algebraiska tal är **algebraiska heltal**, vilka defineras enligt följande:

Definition 3.5. *Ett* ***algebraiskt heltal*** *är ett algebraiskt tal som är en rot till ett moniskt polynom med heltalskoefficienter.*

Sats 3.1. *Ett rationellt algebraiskt heltal är ett* ***heltal****.*

Lemma 3.2. *Låt*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

vara ett polynom med heltalskoefficienter och låt

$$\alpha = \frac{p}{q}$$

vara ett rationellt tal skrivet så att heltalen p och q saknar gemensamma faktorer. Om α är en rot till ekvationen $f(x) = 0$ så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n.

Bevis. Vi antar alltså att:

$$P(\alpha) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Multiplicerar vi nu hela uttrycker med q^n och flyttar över sista termen till högerledet får vi

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^n = -a_0 q^n$$

Eftersom p är en faktor i alla termer i vänsterledet måste även p alltså vara en faktor i högerledet. Men då p och q saknar gemensamma faktorer måste alltså p vara en faktor i a_0.
På motsvarande visas att q är en faktor i a_n. □

Beviset för sats (3.1) faller direkt ur ovanstående bevis. Om ett tal är ett rationellt tal, $^p/_q$, som också är ett algebraiskt heltal så måste nämnaren i detta tal vara en faktor i 1, och det följer alltså att ett sådant tal är ett heltal.

Man kan analogt säga att ett algebraiskt tal, α, är en rot till ett irreducibelt polynom med **heltalskoefficienter** unikt upp till tecken. Detta fås av att multiplicera hela polynomet med den minsta gemensamma nämnaren för $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Vi kommer vidare att främst använda polynom med heltalskoefficienter när vi pratar om algebraiska tal, om inget annat nämns.

Exempel 2. Minimalpolynomet till det gyllenesnittet;

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

är $P(x) = x^2 - x - 1$, och P har graden 2, och därmed säger vi att φ är av grad 2. Då koefficienterna till $P(x)$ är heltal, och högstagrads koefficienten är 1 följer det att φ är ett algebraiskt heltal.

Algebraiska tal är helt enkelt lösningar på algebraiska problem. De flesta tal vi känner till och är bekanta med är därmed algebraiska, då de generellt svarar på

algebraiska frågor så som "Om jag har 25 SEK hur många 5 SEK donats kan jag då köpa?", eller "Om min trädgård är kvadratisk med sidlängd 5m, hur många meter tråd behöver jag för att kunna spänna en tvättlina över diagonalen?". Det är med andra ord lätt att förstå principen av algebraiska tal med hjälp av exempel.

Exempel 3. Ett annat sätt att se på algebraiska tal, α, är att om man kan, genom addition, subtraktion, multiplikation och exponentiering med heltal skilda från 0, reducera α till 0. Genom att göra detta fås även ett till α tillhörande polynomet, samt dess grad.

Givet tal	**Reducering**	**Polynom**	**Grad**
10	$10 - 10 = 0$	$P(x) = x - 10$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot 4 - 3 = 0$	$P(x) = 4x - 3$	1
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$	$P(x) = x^2 - 2$	2
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	$((\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5)^2 - 24 = 0$	$P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$	4
i	$i^2 + 1 = 0$	$P(x) = x^2 + 1$	2

Dessa tal är trivialt algebraiska, trots detta är det svårt att bevisa att specifika tal är transcendentala (eller algebraiska). Exempelvis; är $2^{\sqrt{2}}$ algebraisk eller transcendentalt? Det är ju inte lätt att bara chansa sig till ett polynom, och om man inte hittar ett polynom så betyder ju inte det nödvändigtvis att det inte finns något. Polynomen kan ju i princip bli hur långa som helst. $2^{\sqrt{2}}$ visar sig dock vara transcendentalt.

3.1 Approximation av irrationella tal

Det första bevisat transcendentala talet härleddes ifrån ett resultat om hur bra ett irrationellt tal kan approximeras med ett rationellt tal. Vi kommer därför att gå in på hur vi approximerar irrationella tal.

Vad är irrationella tal egentligen bra för i vardagslivet? Du kan ju omöjligt hitta π på en linjal, utan får alltid nöja dig med att vara "tillräckligt nära". Om du exempelvis läser fysik är du säkert van vid att se $\pi \approx 3,14$ eller $\pi \approx {}^{22}/_{7}$. Alltså approximationer av ett tal, men vad innebär det egentligen att ett tal är en "bra approximation"?

Om vi exempelvis tar det irrationella talet π och försöker approximera detta med ett rationellt tal. Ett vanligt tillvägagångssätt är att bestämma hur många decimaler man vill ha med, alltså:

$$3,1 = \frac{31}{10}, \quad 3,14 = \frac{314}{100}, \quad 3,141 = \frac{3141}{1000}$$

Där det första bråket skiljer sig från π med högst ${}^{1}/_{10}$, nästa med högst ${}^{1}/_{100}$ och så vidare. På detta sättet kan vi approximera vilket tal som helst. Trots

att det är väldigt vanligt att välja approximationer med 10 som nämnare finns ingenting som hindrar nämnaren från att vara vilket annat tal som helst, och det är inget som säger att vi inte kan få bättre approximationer med andra tal. Ersätter vi alltså 10-potensen med ett godtyckligt n kan vi formulera följande triviala sats:

Sats 3.3. *Om ω är något tal och n är något heltal, så finns det något rationellt tal $^m/_n$ som skiljer sig från ω med mindre än $^1/_n$. Alltså;*

$$0 \leq \omega - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

Bevis. Om g är det största heltalet mindre än ω, betraktar vi de rationella talen;

$$g, g + \frac{1}{n}, g + \frac{2}{n}, \cdots, g + \frac{n-1}{n}, g + 1 \tag{1}$$

och väljer ut det sista i följden som är mindre eller lika med ω. Detta tal, vi kallar det $g + {}^l/_n$, kommer att skilja sig från ω med mindre än $^1/_n$, vi har alltså att;

$$0 \leq \omega - \left(g + \frac{l}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

vilket bevisar satsen. □

Vi illustrerar nu denna sats med ett exempel.

Exempel 4. Om vi sätter $\omega = \sqrt{2}$ och $n = 5$, vi vill alltså hitta ett bråk med 5 i nämnaren som approximerar $\sqrt{2}$ och skiljer sig från $\sqrt{2}$ med högst $^1/_5$.

$\sqrt{2}$ ligger mellan 1 och 2, vi skriver därmed (i likhet med ekvation (1)) ut de aktuella bråken:

$$1, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{9}{5}, \quad 2$$

För att lättare kunna jämföra dessa bråk multiplicerar vi samtliga med 5 och kvadrerar därefter dem. Vi jämför alltså nu följande heltal med heltalet $(5\sqrt{2})^2 = 50$;

$$25, \quad 36, \quad 49, \quad 64, \quad 81, \quad 100$$

Och ser nu att $49 < 50 < 64$, alltså är $^7/_5 < \sqrt{2} < {}^8/_5$. Och vi har;

$$0 \leq \sqrt{2} - \frac{7}{5} \leq \frac{1}{5}$$

Faktumet att det finns rationella tal som ligger nära de irrationella talen är alltså inget konstigt. Men det enda sats 3.3 egentligen har sagt är att om approximationen $\pi \approx {}^{22}/_7$ är som i (3.3) så kommer skillnaden mellan π och $^{22}/_7$ vara mindre än $^1/_7$, men det visar sig att det egentligen ligger mycket närmare än så. Exempelvis kan vi betrakta;

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7} \Rightarrow$$

$$\left(3+\frac{10}{71}\right)-\left(3+\frac{10}{70}\right)<\pi-\frac{22}{7}<0$$

som gavs av Arkimedes och ger;

$$0<\frac{22}{7}-\pi<\left(3+\frac{10}{70}\right)-\left(3+\frac{10}{71}\right)=\frac{10}{70}-\frac{10}{71}=\frac{10}{70\cdot 71}=\frac{1}{497}$$

Vilket är betydligt mindre än de $^1/_7$ som sats 3.3 utlovade. Vi kan visa samma sak för $\sqrt{2}$:

$$\frac{7}{5}<\sqrt{2}<\frac{17}{12},$$

och vi har därmed att;

$$0<\sqrt{2}-\frac{7}{5}<\frac{17}{12}-\frac{7}{5}=\frac{1}{60}$$

Även där betydligt mindre det utlovade $^1/_5$. Det visar sig alltså att approximationerna är mycket bättre än vad den tidigare triviala satsen utlovade, och vi formulerar följande sats:

Sats 3.4. *Om ω är ett irrationellt tal och N är något heltal, så finns ett rationellt tal $^m/_n$, vars nämnare inte överstiger N som skiljer sig från ω med mindre än $^1/_{nN}$. Vidare så finns det oändligt många bråk $^m/_n$ som skiljer sig från ω med mindre än $^1/_{n^2}$.*

Exempel 5. I två tidigare exemplen ser vi att

$$\left|\sqrt{2}-\frac{7}{5}\right|<\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25},$$

$$\left|\frac{22}{7}-\pi\right|<\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}.$$

Dessa är fortfarande större än den faktiska skillnaden, men trots detta en betydlig förbättring av den första satsen.

Bevis. För att bevisa sats 3.4 betraktar vi följande serie av tal:

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, N\omega$$

och serien av de största heltalen mindre än dessa:

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_N.$$

Vi har då att:

$$0<\omega-g_1<1, \quad 0<2\omega-g_2<1, \quad \ldots \quad 0<N\omega-g_N<1.$$

Där vi har strikt olikhet eftersom ω är irrationellt. Beviset är egentligen ganska enkelt, men kan lätt bli för abstrakt, vi genomför därmed beviset först med ett enskilt exempel för att sedan generalisera. Om vi tar $\omega = \sqrt{2}$, $N = 13$ och vi får därmed denna tabell av alla värden med vilka dessa tal överskrider heltalet precis under det:

$$\begin{array}{lcll}
\sqrt{2} & = & 1,414\ldots & = 1 + 0,414\ldots \\
2\sqrt{2} & = & 2,828\ldots & = 2 + 0,828\ldots \\
3\sqrt{2} & = & 4,242\ldots & = 4 + 0,242\ldots \\
4\sqrt{2} & = & 5,656\ldots & = 5 + 0,656\ldots \\
5\sqrt{2} & = & 7,071\ldots & = 7 + 0,071\ldots \\
6\sqrt{2} & = & 8,485\ldots & = 8 + 0,485\ldots \\
7\sqrt{2} & = & 9,899\ldots & = 9 + 0,899\ldots \\
8\sqrt{2} & = & 11,313\ldots & = 11 + 0,313\ldots \\
9\sqrt{2} & = & 12,727\ldots & = 12 + 0,727\ldots \\
10\sqrt{2} & = & 14,142\ldots & = 14 + 0,142\ldots \\
11\sqrt{2} & = & 15,556\ldots & = 15 + 0,556\ldots \\
12\sqrt{2} & = & 16,970\ldots & = 16 + 0,970\ldots \\
13\sqrt{2} & = & 18,384\ldots & = 18 + 0,384\ldots
\end{array}$$

Om vi nu tänker oss att vi tar alla dessa värden med vilka talet överskrider heltalet under dem och sorterar dem efter storleksordning, då har vi 13 tal ordnade mellan 0 och 1. Dessa formar då 14 intervall med varierande intervallstorlek. Åtminstone ett av dessa intervall måste vara mindre än $^1/_{14}$ i längd. För hade de alla varit $^1/_{14}$ så skulle $\sqrt{2}$ varit ett rationellt tal, men det vet vi redan att det inte är. Hade alla intervallen varit mer eller lika med $^1/_{14}$ så hade de inte få plats mellan 0 och 1, vilket de enligt konstruktionen gör.

Vi vet alltså att ett sådant intervall existerar, men vi vet inte vilket av intervallen det är. Vi kan däremot kalla den undre delen av det kortaste intervallet $a\sqrt{2} - g_a = r_a$ och den övre delen $b\sqrt{2} - g_b = r_b$. Vi har då:

$$0 < r_b - r_a = \left(b\sqrt{2} - g_b\right) - \left(a\sqrt{2} - g_a\right) < \frac{1}{14}$$

och därmed

$$0 < \sqrt{2}\,(b - a) - (g_b - g_a) < \frac{1}{14}$$

Då a och b är två heltal mellan 1 och 13 och då de är olika är deras differens, bortsett från tecken också något utav dessa tal, med andra ord

$$|b - a| \leq 13$$

Därmed är $|b - a|\,\sqrt{2}$ något av de 13 multiplarna av $\sqrt{2}$; vi kallar denna $n\sqrt{2}$. Vidare så skiljer sig $n\sqrt{2}$ från heltalet $|g_b - g_a|$ precis över eller under sig med mindre än $^1/_{14}$. Vi kallar detta heltal m och vi har:

$$\left|n\sqrt{2} - m\right| < \frac{1}{14}, \quad n \leq 13 \Rightarrow$$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{14n}$$

Ur tabellen har vi att:

$$a = 1$$
$$b = 13$$
$$r_a = 0,414$$
$$r_b = 0,384$$

Detta ger $|b - a| = 13 - 1 = 12$ och $m = 17$, vilket ger approximationen $\left|\sqrt{2} - {}^{17}/_{12}\right| \leq {}^{1}/_{168}$.

Läse vi nu av i tabellen ser vi att et minsta värdet är det 5:e, $5\sqrt{2}-7 = 0,071\ldots$, och det största är det 12:e, $12\sqrt{2} = 16 + 0,970\cdots = 17 - 0,030\ldots$ eller $17 - 12\sqrt{2} = 0,030\ldots$, vilket stämmer överens med den beräknade approximationen.

Det generella beviset följer nu på samma sätt, men $\sqrt{2}$ ersätts med ω, 13 med N, $N+1$ ersätter 14 och vi får att för något tal $n \leq N$ gäller det att det finns ${}^{m}/_{n}$ så att

$$\left|\omega - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{(N+1)n} \tag{2}$$

Detta bevisar första delen av satsen och då vi har $n \leq N$ implicerar (2) att

$$\left|\omega - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2} \tag{3}$$

Den andra delen av satsen fastställer att för något irrationellt tal ω så finns det ett oändligt antal bråk ${}^{m}/_{n}$ som har egenskapen (3). För att visa detta räcker det att visa att för varje rationellt tal ${}^{m}/_{n}$ som uppfyller (3) kan vi hitta ytterligare ett rationellt tal ${}^{m'}/_{n'}$ som ligger närmare ω och också uppfyller (3). Då ω är irrationellt gäller att:

$$\omega - \frac{m}{n} \neq 0$$

$\omega - {}^{m}/_{n}$ skiljer sig alltså från noll med något specifikt tal. På grund av detta måste det alltså finnas ett bråk ${}^{1}/_{N'}$, för något tillräckligt stort N', som ligger närmare 0 än $\omega - {}^{m}/_{n}$. Vi har alltså

$$0 < \left|\frac{1}{N'}\right| < \left|\omega - \frac{m}{n}\right| \tag{4}$$

Använder vi nu N' istället för N i det vi redan bevisat kan vi nu hitta ett rationellt tal ${}^{m'}/_{n'}$ med $n' \leq N'$ som uppfyller olikheten

$$\left|\omega - \frac{m'}{n'}\right| < \frac{1}{(N'+1)n'}$$

Alltså, $\omega - {}^{m'}/_{n'}$ skiljer sig från 0 med mindre än ${}^{1}/_{(N'+1)}$. Men enligt (4), skiljer sig $\omega - {}^{m}/_{n}$ från 0 med mer än ${}^{1}/_{N'}$, därmed är ${}^{m'}/_{n'}$ närmare ω än ${}^{m}/_{n}$ och

konsekvensenligt är $^m/_n$ och $^{m'}/_{n'}$ olika tal.

Därmed finns alltså inget "sista" rationella tal $^m/_n$ med egenskapen (2), varje nytt rationellt tal följs av ytterligare ett på samma vis och mängden bråk som uppfyller (2) är alltså oändlig, vilket skulle visas. □

Den första, triviala satsen 3.3, använder alla heltal som nämnare, medan den andra satsen, sats 3.4, väljer ut specifika tal som nämnare med egenskapen (2). Vi kallar dessa nämnare "bra nämnare".

Exempel 6. Från de senaste approximationerna av $\sqrt{2}$ ser vi att 2, 5 och 12 är "bra nämnare". Tittar vi vidare hittar vi att även $29, 70, 160, \ldots$ också är bra nämnare.

För π är talet 7 en bra nämnare. Denna nämnare är faktiskt mycket bättre än vad sats 3.4 föreslår, då vi sedan innan visat att $\left|^{22}/_7 - \pi\right| < {}^1/_{497}$ vilket är bra mycket mindre än det utlovade $^1/_{7^2} = {}^1/_{49}$. Vilket leder till att man kan fråga sig om det finns en ännu bättre nämnare; skulle man kanske kunna hitta en nämnare för vilken vi kan formulera en sats enligt vilken det finns tal $^m/_n$ så att:

$$\left|\omega - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^3} \tag{5}$$

eller liknande olikhet.

Vi ska nu visa att en sådan förbättring generellt sett är omöjlig för alla irrationella tal ω. Vi börjar igen med att betrakta ett specifikt tal $\omega = \sqrt{2}$. Kollar vi på de två första möjliga talen n, $n = 1$ och $n = 2$ ser vi att olikheten håller (för $n = 1$ gäller olikheten trivialt för alla tal, för $n = 2$ ses detta av att $m = 3$ väljs).

Vi bortser från dessa två val av n och ska nu visa att olikheten 5 inte håller för övriga val av n. Då n nu är större än 2 räcker nu att visa att varje rationellt tal $^m/_n$ skiljer sig från $\sqrt{2}$ med mer än $^1/_{3n^2}$, alltså:

$$\left|\omega - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{3n^2}$$

Vi kollar nu på $^m/_n$ inom olika intervall:

- För $^m/_n \geq 1,55$: Då är $^m/_n - \sqrt{2} \geq 0,10$, men $^1/_{3n^2} < {}^1/_{3\cdot 4} = {}^1/_{12}$ (ty $n > 2$).
- För $\sqrt{2} < {}^m/_n < 1,55$: Vi har att:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 = \frac{m^2 - 2n^2}{n^2} = \frac{g}{n^2}$$

där g är något heltal. Det följer att g är åtminstone 1 så:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 \geq \frac{1}{n^2}$$

Utnyttjandes konjugatregeln, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, får vi att:

$$\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right) \geq \frac{1}{n^2}$$

och då är

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}}$$

Då $^m/_n$ skulle vara mindre än 1,55 får vi $^m/_n + \sqrt{2} < 1,55 + 1,45 = 3$, vilket är inverst större än $^1/_3$ och

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} > \frac{1}{3n^2}$$

- För $0 < {}^m/_n < \sqrt{2}$: I likhet med föregående punkt kan vi säga att:

$$2 - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{g}{n^2} \geq \frac{1}{n^2},$$

och det följer att:

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} \geq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}} > \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3n^2},$$

Vilket bevisar ekvationen (5) inte håller generellt.

Det verkar alltså som om det finns en övre gräns för hur bra ett irrationellt tal kan approximeras. Det visar sig, vilket vi kommer se närmare på i nästa stycke, att hur bra en approximation av ett irrationellt algebraiskt tal kan bli är kopplat till talets grad.

3.2 Louivilles sats

Liouville sats beskriver med vilken precision man kan approximera ett algebraiskt tal med ett rationellt tal, och ger därmed tillräckliga villkor för att ett tal skall vara algebraiskt, vilket medför villkoren för att ett tal skall vara transcendentalt.

Sats 3.5 (Liouvilles sats)**.** *För varje algebraiskt tal α av grad $n > 1$, finns ett $c = c(\alpha) > 0$ sådan att $|\alpha - {}^p/_q| > {}^c/_{q^n}$ för alla rationella tal ${}^p/_q, (q > 0)$.*

Med andra ord så finns det en tydlig gräns för hur bra en approximation av ett algebraiskt tal till ett rationellt tal kan vara.

Innan vi påbörjar beviset av Liouvilles sats påminner vi oss om **medelvärdessatsen**.

Sats 3.6. *Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a, b), så finns en punkt ξ i (a, b) sådan att*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Bevis av Liouvilles sats. Satsen följer nästan direkt från definitionen av ett algebraiskt tal. Ett reellt eller komplext tal kallas ju för ett algebraiskt tal ifall det är en rot till ett polynom med heltalskoefficienter; varje algebraiskt tal α är en lösning till något sådant irreducibelt polynom, säg P, unikt upp till en konstant multipel. Det räcker att bevisa satsen för reella α. För något rationellt tal, ${}^{p}/_{q}, (q > 0)$, har vi från medelvärdessatsen att:

$$-P({}^{p}/_{q}) = P(\alpha) - P({}^{p}/_{q}) = (\alpha - {}^{p}/_{q})P'(\xi) \Rightarrow$$

$$|\alpha - {}^{p}/_{q}| = \frac{|P({}^{p}/_{q})|}{|P'(\xi)|}$$

för något ξ mellan ${}^{p}/_{q}$ och α. Vi kan uppenbarligen anta att $|\alpha - {}^{p}/_{q}| < 1$, för annars skulle resultatet gälla trivialt, då är $|\xi| < 1+|\alpha|$ (för att ξ ska ligga mellan α och ${}^{p}/_{q}$) och därmed är $|P'(\xi)| < M$ för något $M = M(\alpha)$, eftersom $P'(x)$ är en kontinuerlig funktion på det begränsade intervallet $[-(1 + |\alpha|), 1 + |\alpha|]$, sätter vi $M = {}^{1}/_{c}$ får vi därmed:

$$|\alpha - {}^{p}/_{q}| > c\,|P\,({}^{p}/_{q})|\,.$$

Men, då P är irreducibelt, har vi att $P({}^{p}/_{q}) \neq 0$, och heltalet $|q^n P({}^{p}/_{q})|$ är därmed åtminstone 1 och därmed gäller olikheten även för:

$$|\alpha - {}^{p}/_{q}| > c\,|P\,({}^{p}/_{q})| \geq c\frac{|P\,({}^{p}/_{q})|}{|q^n P({}^{p}/_{q})|} \geq \frac{c}{q^n}$$

och satsen följer. □

4 Transcendentala tal

Innan vi går in på de satser och bevis som kommer att behandlas i det här kapitlet går vi igenom en egenskap för transcendentala och algebraiska tal:

Vi ska nu undersöka vad som händer om man multiplicerar två algebraiska tal med varandra, eller om man multiplicerar ett transcendentalt tal med exempelvis i.

Sats 4.1. *Summor, differenser, produkter och kvoter av två algebraiska tal är algebraiskt.*

Lemma 4.2. *$r+1$ linjära funktioner med r obekanta med rationella koefficienter är linjärt beroende över $\mathbb{Q}$.*

Detta lemma är såpass välkänt att jag tar mig friheten att inte bevisa det.

Bevis för sats 4.1. Låt α och β vara algebraiska tal av grad m respektive n. Då uppfyller α en algebraisk ekvation på formen:

$$\alpha^m = a_{m-1}\alpha^{m-1} + a_{m-2}\alpha^{m-2} + \ldots + a_1\alpha + a_0 \tag{6}$$

Med rationella koefficienter a_j. Därmed är α^m en linjärkombination av $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$ med rationella koefficienter. Samma gäller då för α^{m+1} ty om man multiplicerar båda sidorna av ekvation (6) med α och sedan ersätter α^m i termen $a_{m-1}\alpha^m$ med lägregradstermerna högerledet i (6). Denna process kan göras iterativt och vi ser att $\alpha^m, \alpha^{m+1}, \alpha^{m+2}, \ldots$ kan uttryckas som linjärkombinationer av $1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1}$ med rationella koefficienter. På samma sätt kan $\beta^n, \beta^{n+1}, \ldots$ uttryckas som linjärkombinationer av $1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}$ med rationella koefficienter.

Betrakta nu de $mn+1$ antal talen:

$$1, \quad \alpha+\beta, \quad (\alpha+\beta)^2, \quad \ldots, \quad (\alpha+\beta)^{mn} \tag{7}$$

Utvecklar vi dessa tal och ersätter därefter α:n med exponenter större eller lika med m med de lägre exponenterna från (6) och på samma vis för β:na med exponenter större eller lika med n. Och vi ser att dessa $mn+1$ tal kan skrivas som en linjärkombination av de mn talen:

$$\alpha^j\beta^k, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 \quad \text{och} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Med rationella koefficienter. Dessa mn tal kan bli substituerade med r från lemma 4.2 och vi kan dra slutsatsen att talen i ekvation (7) är linjärt beroende. Det följer att $\alpha+\beta$ är ett algebraiskt tal.

Beviset för produkten $\alpha\beta$ kan visas analogt genom att ersätta talen $\alpha+\beta$ i ekvation (7) med $\alpha\beta$.

Subtraktion och division (bortsett från division med 0) följer också ty om α är ett algebraiskt tal av grad m och $P(x) = 0$, där $P(x)$ är ett polynom med heltalskoefficienter, så uppfyller $-\alpha$ polynomet där man från P ändrat tecken på alla koefficienter av udda grad, och α^{-1} uppfyller $x^m P(1/x) = 0$. □

Från detta kan vi avläsa om α och β är algebraiska så måste även $\alpha + i\beta$ också vara algebraiskt. Man kan till och med dra slutsatsen att $\alpha + i\beta$ är algebraiskt om och endast om α och β är algebraiska.

Lemma 4.3. *Om α och β är reella är $\alpha + i\beta$ algebraiskt om och endast om α och β är algebraiska.*

Bevis. Talet i är algebraiskt då det är en rot till $x^2 + 1 = 0$. Därmed är $\alpha + i\beta$ algebraiskt om α och β är algebraiska i enighet med sats 4.1.

Omvänt gäller att om $\alpha + i\beta$ är algebraiskt, så finns det ett $P(x)$ sådant att

$$P(\alpha + i\beta) = 0,$$

där $P(x)$ är ett polynom med rationella koefficienter. Då är även $\alpha - i\beta$ också en rot till $P(x) = 0$ (se avsnitt 5.1). Därmed är, i enlighet med sats 4.1, summan, 2α, och differensen, $2i\beta$, av $\alpha + i\beta$ och $\alpha - i\beta$ också algebraiska. Multiplicerar vi nu 2α och $2i\beta$ med de algebraiska talen $1/2$ respektive $-i/2$, återfår vi nu att α och β är algebraiska. □

Låter vi alltså α vara algebraiskt och η vara transcendentalt, då gäller att även följande tal är transcendentala:

$$\eta + i\eta, \quad \alpha + i\eta, \quad \eta + i\alpha.$$

Detta gör att man inte förlorar någon generalitet av att i satser och bevis anta att alla transcendentala tal är reella, varför vi för enkelhetens skull kommer att göra det i resten av uppsatsen. Värt att notera är att det inte går att göra liknande slutsatser av andra kombinationer av algebraiska tal och transcendentala tal, vi kan exempelvis inte utan vidare avgöra huruvida följande tal är transcendentala eller algebraiska:

$$\eta^{\alpha}, \quad \eta_1^{\eta_2}, \quad \eta_1 + \eta_2, \quad \alpha_1^{\alpha_2}, \quad \eta_1 \cdot \eta_2, \quad \dots$$

Exempel 1. Förutsatt att vi vet att π och e är transcendentala kan följande slutsatser dras av följande tal:

$\pi + ie$	är ett transcendentalt tal,
$\pi + i$	är ett transcendentalt tal,
$\pi + e$	vi kan inte direkt dra några slutsatser om det här talet.

4.1 Liouvilles konstant

Som nämns i föregående sektion är ett transcendentalt tal ett tal som inte är algebraiskt. Vi har även ifrån sats 3.5 ett krav som måste uppfyllas för att ett tal skall vara algebraiskt. Man kan med andra ord utifrån detta konstruera ett tal som inte uppfyller kraven, och därmed är transcendentalt. Ett uppenbart sådant nummer är:

$$\begin{aligned}\eta &= 0,11000100000000000000000001... \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}\end{aligned}$$

Alltså ett tal med ettor i decimalutvecklingen som har ett fakultativt ökande antal nollor mellan sig ju längre till höger i talet vi rör oss. Talet kan inte vara rationellt då decimalföljden aldrig upprepar sig. Och med hjälp av Liouvilles sats kan vi även lätt visa att talet inte heller är algebraiskt:

Om vi väljer p_j och q_j:

$$p_j = 10^{j!} \sum_{n=1}^{j} 10^{-n!}, \qquad q_j = 10^{j!} \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

så är p_j, q_j relativt prima rationella heltal och vi har då att:

$$\begin{aligned}\left|\eta - \frac{p_j}{q_j}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} - \frac{10^{j!}\sum_{n=1}^{j} 10^{-n!}}{10^{j!}}\right| = \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} \\ &< 10^{-(j+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = \frac{10}{9} 10^{-(j\cdot j! + j!)} = \frac{10}{9} q_j^{-j-1} < q_j^{-j} \leq \frac{c}{q_j^j}.\end{aligned} \tag{8}$$

Sammanfattningsvis har vi att:

$$\left|\eta - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^j}$$

Vilket bryter olikheten i Liouvilles sats, och η är därmed transcendentalt. Detta specifika tal, η, kallas Liouvilles konstant. Mer generellt gäller att man på samma sätt kan få att;

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n!}}, \qquad 1 \leq a_n \leq b$$

är transcendentalt. η är i bas b ett tal i med en siffra på var n:te fakultets decimalplats:

$$\eta = [0, a_1 a_2 000 a_3 0000000000000000000 a_4 ...]_b$$

Decimalföljden upprepas inte i bas b, och kan därmed inte vara rationellt och talet bryter olikheten i sats 3.5 och är därmed inte heller algebraiskt.

4.2 Är det här relevant?

Vad vi gjort hittills är alltså klargöra några av kraven som ett tal måste uppfylla för att vara ett algebraiskt tal är för att sedan bryta mot dessa krav för att konstruera ett transcendentalt tal. Detta kan verka lite forcerat, och det är det också, men det visar sig att det finns mycket flera transcendentala tal än algebraiska tal. Det gäller till och med att det finns oändligt många fler transcendentala tal än algebraiska. Detta kanske går emot ens intuition då i princip alla tal som används i vardagen och känner till är algebraiska.

För att visa detta måste vi först visa att mängden, $\mathbb{R}$, av reella tal är ouppräknelig.

Definition 4.1. *En mängd kallas uppräknelig om den:*

i är ändlig,

eller

ii det finns en bijektion mellan mängden och $\mathbb{Z}^+$

Sats 4.4. *De reella talen är ouppräkneliga.*

Cantors diagonalbevis. Låt oss anta för detta beviset att mängden $\mathbb{R}$ är uppräkneligt. Vi väljer även att koncentrera oss på delmängden $(0, 1)$.

$$(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$$

Det vi nu har antagit är alltså att det finns en bijektion mellan $(0, 1)$ och $\mathbb{Z}^+$.

Vi representerar mängden från 0 till 1 av alla reella tal i följande tabell:

$$\begin{array}{ll} 1 & r_1 = 0, \mathbf{d_{11}} d_{12} d_{13} d_{14} \cdots \\ 2 & r_2 = 0, d_{21} \mathbf{d_{22}} d_{23} d_{24} \cdots \\ 3 & r_3 = 0, d_{31} d_{32} \mathbf{d_{33}} d_{34} \cdots \\ 4 & r_4 = 0, d_{41} d_{42} d_{43} \mathbf{d_{44}} \cdots \\ \vdots & \\ n & r_n = 0, d_{n1} d_{n2} d_{n3} d_{n4} \cdots \mathbf{d_{nn}} \\ \vdots & \end{array}$$

Där listan nu innehåller samtliga tal mellan 0 och 1. Varje decimalsiffra har formen d_{ij} där i står för raden och j för kolumnen.

$$d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Vi definierar nu talet a, vi låter a definieras på ett liknande sätt som talen i tabellen ovan:

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

Och väljer a_i så att $a_i \neq d_{ii}$. Alltså:

$$\begin{array}{lcl} a_1 & \neq & d_{11} \\ a_2 & \neq & d_{22} \\ a_3 & \neq & d_{33} \\ a_4 & \neq & d_{44} \\ \vdots & & \\ a_n & \neq & d_{nn} \\ \vdots & & \end{array}$$

Man kan se detta som en diagonal genom decimalsiffrorna (se de fetmarkerade talen i tabellen ovan), vadan namnet.

På detta sätt kommer a skilja sig från samtliga tal r_i på minst en decimalplats.

Men då vi definierade r som mängden av samtliga tal mellan 0 och 1 och nu hittar $a \in (0, 1)$ men som inte finns med i denna mängden så är detta en motsägelse. Mängden $(0, 1)$ är alltså inte uppräknelig och då:

$$(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$$

och det följer att $\mathbb{R}$ inte heller är uppräkneligt. □

Det kan lätt tänkas att det är väl bara att lägga till a i mängden, så får man en ny mängd. Men det går då att hitta ett nytt tal med samma regler som för a som inte heller passar in.

Sats 4.5. *Mängden av alla algebraiska tal är uppräkneliga.*

Bevis. Betrakta alla algebraiska ekvationen

$$P(x) = 0 \tag{9}$$

där

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

är ett irreducibelt och primitivt polynom med heltalskoefficienter a_j där $a_0 > 0$. Varje algebraiskt tal uppfyller exakt en sådan ekvation, minimal ekvation.

För varje heltal $N = 2, 3, 4 \ldots$ så finns det ett ändligt antal ekvationer (9) sådana att

$$n + a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| = N$$

och därmed endast en ändlig mängd algebraiska tal som är rötter till dessa ekvationer.

Exempel 2. Om N =3 har vi ekvationerna $x - 1 = 0$ och $x + 1 = 0$. Dessa algebraiska tal kan ordnas i en ändlig sekvens S_N i ett bestämt ordnings system

(exempelvis efter magnituden av realdelen och imaginärdelen). När man sedan formar den sammanfogade sekvensen

$$S_2, S_3, S_4, \cdots$$

innesluter man alla algebraiska tal i uppräknelig inramning, vilket definierar en bijektion till $\mathbb{Z}^+$ □

Alla reella tal som inte är algebraiska är transcendentala. Då de reella talen är ouppräkneliga och de algebraiska talen är uppräkneliga gäller det alltså att de transcendentala talen är ouppräkneliga. Detta betyder alltså att det finns oändligt många fler transcendentala tal än algebraiska tal. Inte nog med att i princip alla tal är transcendentala, det visar sig även att högst användbara tal som π och e är transcendentala.

5 Hjälpsatser och bakgrundskunskaper

5.1 Konjugat

Ett begrepp som kommer att återkomma i uppsatsen är begreppet "konjugation" eller "konjugat". Begreppet konjugat kan användas inom sammanhang inom matematiken (exempelvis; komplexa konjugation, konjugatregeln, rationalisering av täljare etc.). I detta sammanhang syftar de till rötterna till ett algebraiskt polynom.

Definition 5.1. *Om ett algebraiskt tal α är en rot till ett irreducibelt polynom $P(x)$ så kallas alla $P(x)$:s rötter för* ***konjugat*** *till α.*

Exempel 1. Vi återkopplar till tabellen i exempel 3. Och fokuserar på talen $\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ och söker nu dessas respektive konjugat.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \rightarrow \quad & P(x) = x^2 - 2 \\ & P(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Och därmed är $-\sqrt{2}$ ett konjugat till $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2}+\sqrt{3} \rightarrow \quad & P(x) = x^4 - 10x^2 + 1 \\ & P(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ x_3 = \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ x_4 = -\sqrt{2}-\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Och därmed är $\sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, -\sqrt{2}-\sqrt{3}$ konjugat till $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Vi noterar även att produkten av en komplett mängd konjugat är ett rationellt tal. För att visa detta tänker vi oss ett irreducibelt polynom med heltalskoefficienter, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$, med de algebraiska lösningarna $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ som, då P är irreducibelt är en komplett mängd konjugat. Vi kan nu skriva polynomet på följande vis:

$$\prod_{i=0}^{n}(x-\alpha_i) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} \cdots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n},$$

och det följer att ${}^{a_0}/_{a_n}$ kan skrivas på formen:

$$\frac{a_0}{a_n} = \prod_{i=0}^{n}\alpha_i$$

${}^{a_0}/_{a_n}$ är rationellt och det följer att produkten av en komplett mängd konjugat är ett rationellt tal.

5.2 Elementära symmetriska polynom

Vi kommer senare i uppsatsen att addera och multiplicera algebraiska tal med varandra och behöver därmed, för att kunna dra slutsatser om summor och produkter, se över elementära symmetriska polynom. Först definierar vi vad ett symmetriskt polynom är:

Definition 5.2. *Ett polynom, P men n variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är ett symmetriskt polynom ifall variablerna är utbytbara med varandra så att:*

$$P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

för varje permutation σ av $\{1, \ldots, n\}$.

Exempel 2. Ett exempel på ett symmetriskt polynom med två variabler är:

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 25 = y^2 + x^2 - yx + 25 = P(y, x)$$

Det visar sig att alla symmetriska polynom kan skrivas som summor och produkter utav **elementära symmetriska polynom** (Jean-Pierre Tignol 2001).

Definition 5.3. *Elementära symmetriska polynom med n variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kan skrivas som $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ med $k = 0, 1, \ldots, n$ defineras som:*

$$\begin{aligned}
e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1 \\
e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i \le n} x_i \\
e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \\
e_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k \\
&\vdots \\
e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 \cdot \cdots \cdot x_n
\end{aligned} \tag{10}$$

Exempel 3. Ett exempel på ett symmetriskt polynom som kan byggas av elementära symmetriska funktioner är $x^2 + y^2$:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (e_1(x, y))^2 - 2e_2(x, y)$$

Utifrån denna definition kan vi dra följande slutsatser om algebraiska tal som är till varandra konjugat:

Sats 5.1.

(i) Elementära symmetriska polynom av en komplett mängd konjugat av ett algebraiskt tal är rationellt.

(ii) Varje symmetriskt polynom av en komplett mängd konjugat av ett algebraiskt tal är rationellt.

Bevisskiss. Följande resonemang troliggör satsen. Givet ett algebraiskt minimalpolynom med rötterna $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

här kan vänsterledet skrivas som ett moniskt polynom med rationella koefficienter:

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} = 0. \tag{11}$$

Polynomet kan även skrivas på följande vis:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) = 0.$$

Utvecklar man sedan detta polynom fås:

$$x^n + x^{n-1}(-1)^1 \sum_{0 \le i \le n} (\alpha_i) + x^{n-2}(-1)^2 \sum_{0 \le i < j \le n} (\alpha_i\alpha_j) + \cdots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = 0.$$

Där nu koefficienterna enligt definitionen, bortsett från tecken, är de elementära symmetriska polynomen $e_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \ldots, e_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Med andra ord kan polynomet skrivas som:

$$e_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)x^n + (-1)^1e_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^ne_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{12}$$

Eftersom detta är ett moniskt polynom som är en omskrivning utav ekvation (11) måste koefficienterna i (11) vara det samma som koefficienterna i (12). Och vi får nu att:

$$\begin{aligned}
e_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= 1 &&= \left|\tfrac{a_0}{a_0}\right| \\
|e_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| &= \left|\textstyle\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i\right| &&= \left|\tfrac{a_1}{a_0}\right| \\
|e_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| &= \left|\textstyle\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i\alpha_j\right| &&= \left|\tfrac{a_2}{a_0}\right| \\
|e_3(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| &= \left|\textstyle\sum_{1 \le i < j < k \le n} \alpha_i\alpha_j\alpha_k\right| &&= \left|\tfrac{a_3}{a_0}\right| \\
&\vdots \\
|e_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| &= |\alpha_1\alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_n| &&= \left|\tfrac{a_n}{a_0}\right|
\end{aligned}$$

Då $a_0, \ldots, a_n$ är heltal så måste dessa kvoter vara rationella. Och det följer att en elementär symmetrisk funktion är rationell. □

Vi illustrerar nu detta med ett exempel:

Exempel 4. Vi tar igen polynomet med det gyllene snittet $P(x) = x^2 - x - 1$. Vi vet sedan innan att dess rötter är $^1/_2 + {}^{\sqrt{5}}/_2$ respektive $^1/_2 - {}^{\sqrt{5}}/_2$, dessa är nu en komplett mängd konjugat. Vi kan nu beräkna följande:

$$e_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{Q},$$

$$e_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1 \in \mathbb{Q}.$$

Ytterligare en slutsats vi kan dra utifrån elementära symmetriska polynom är att för en mängd algebraiska tal $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ så finns ett tal l sådant att $l\alpha_1, l\alpha_2, \ldots, l\alpha_n$ blir algebraiska heltal.

Sats 5.2. *För en mängd algebraiska tal $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ så finns ett tal l sådant att $l\alpha_1, l\alpha_2, \ldots, l\alpha_n$ blir algebraiska heltal.*

Bevis. Om $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är en godtycklig mängd algebraiska tal så finns det ett minimalpolynom sådant att:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \qquad \text{för } x = \alpha_1, \ldots, x = \alpha_n$$

Låt $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $n \leq m$ vara alla rötter.
Denna ekvation kan nu skrivas om som ett moniskt polynom med rationella koefficienter.

$$x^m + \frac{a_1}{a_0}x^{m-1} + \cdots + \frac{a_m}{a_0} = 0.$$

Det vi söker nu är alltså ett tal l att multiplicera rötterna som gör att koefficienterna i detta polynom blir heltal. Ett annat sätt att skriva polynomet är nu:

$$e_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)x^m - e_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)x^{n-1} + \cdots + (-1)^m e_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

Där $e_0, \ldots, e_n$ är definierat enligt tidigare. Och precis som i definitionen ovan kan vi nu skriva att:

$$\begin{aligned}
|e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)| &= \left|\textstyle\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right| &&= \left|\tfrac{a_1}{a_0}\right| \\
|e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)| &= \left|\textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\right| &&= \left|\tfrac{a_2}{a_0}\right| \\
|e_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)| &= \left|\textstyle\sum_{1\leq i<j<k\leq n} x_ix_jx_k\right| &&= \left|\tfrac{a_3}{a_0}\right| \\
&\vdots \\
|e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)| &= |x_1x_2 \cdot \cdots \cdot x_n| &&= \left|\tfrac{a_n}{a_0}\right|
\end{aligned}$$

Vi kan nu läsa av att med $l = a_0$ uppfylles satsen ty:

$$\begin{aligned}
&\left|\textstyle\sum_{1\leq i\leq n} a_0\alpha_i\right| &&= |a_1| \\
&\left|\textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_0\alpha_ia_0\alpha_j\right| &&= |a_0a_2| \\
&\left|\textstyle\sum_{1\leq i<j<k\leq n} a_0\alpha_ia_0\alpha_ja_0\alpha_k\right| &&= \left|a_0^2a_3\right| \\
&\vdots \\
&|a_0\alpha_1a_0\alpha_2 \cdot \cdots \cdot a_0\alpha_n| &&= \left|a_0^{n-1}a_n\right|
\end{aligned}$$

Alltså uppfyller $a_0\alpha_1, \ldots, a_0\alpha_m$ en ekvatione med heltalskoefficienter som i sats 5.2. □

5.3 Gränsvärde

Här presenteras och bevisas ett gränsvärde som kom att användas i huvudsatsen:

Lemma 5.3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad \textit{för } a \in \mathbb{R}$$

Bevis. Vi kan, utan att förlora generalitet, anta att $a > 0$. Vi sätter:

$$K = a + 1$$

För alla $n > K$ har vi nu att:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{a^n}{n!} \\ &= \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{K} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n} \\ &\leq \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{K} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{K} \\ &= \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{K} \cdot \left(\frac{a}{K}\right)^{n-K} \end{aligned}$$

Produkten ${}^{a}/_{1} \cdot {}^{a}/_{2} \cdot \ldots \cdot {}^{a}/_{K}$ är ett tal oberoende av n medan

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{K}\right)^{n-K} = 0$$

Eftersom $0 < {}^{a}/_{K} < 1$. Instängningsregeln ger nu att:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

□

5.4 Permutationer

En permutation är för en icke tom ändlig mängd X en bijektion från X till X. Oftast väljs X till $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exempel 5. En typisk permutation i $\mathbb{N}_n$ är exempelvis en funktion α som definieras av:

$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 4, \quad \alpha(3) = 5, \quad \alpha(4) = 1, \quad \alpha(5) = 3$$

Antalet möjliga permutationer av $\mathbb{N}_n$ är $n!$ och vi kallar mängden av alla möjliga permutationer för S_n.

Exempel 6. För S_3 har vi att de möjliga permutationerna är:

$$\begin{array}{cccccc} 123 & 123 & 123 & 123 & 123 & 123 \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \end{array}.$$

Antalet permutationer är $3! = 6$.

5.5 I(t)

Innan vi påbörjar beviset av Lindemann-Weierstrass sats (1.1) definierar vi integralen $I(t)$. Valet av $I(t)$ kommer ifrån "Padé approximanten" av e^x, vilket innebär den bästa approximationen av e^x med en rationell funktion. Vi introducerar alltså $I(t)$, antagandes att $f(x)$ är ett reellt polynom, av grad m, som

$$I(t) = \int_0^t e^{t-x} f(x) dx$$

där t är ett godtyckligt reellt tal och integralen är tagen över linjen mellan 0 och t, då. Partiell integrering ger:

$$I(t) = \left[-e^{t-x} f(x)\right]_0^t + \int_0^t e^{t-x} f'(x) dx.$$

Upprepad partiell integrering, m gånger, ger:

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t), \tag{13}$$

där $f^{(j)}(x)$ betecknar den j:te derivatan av f.
Om $f(x) = \sum a_i x^i$, låt $\bar{f}(x) = \sum |a_i| x^i$; med andra ord det polynom som fås av att ersätta f:s koefficienter med deras absolutbelopp. Då $0 \leq x \leq |t|$ gäller följande olikheter;

$$\begin{cases} e^{t-x} \leq e^t \\ f(x) \leq |f(x)| \leq \bar{f}(|x|) \leq \bar{f}(|t|) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^t e^{t-x} f(x) dx \leq \int_0^t |e^{t-x} f(x)| dx \leq \int_0^t e^{|t|} \bar{f}(|t|) dx = e^{|t|} \bar{f}(|t|) \int_0^t dx \leq |t| e^{|t|} \bar{f}(|t|)$$

Vi får därmed följande begränsningar för integralen;

$$|I(t)| \leq \int_0^t |e^{t-x} f(x)| dx \leq |t| e^{|t|} \bar{f}(|t|). \tag{14}$$

5.6 Bevisuppsättning

För att enklare förstå beviset för Lindemann-Weierstrass sats (sats (1.1)) och hänga med på vad det är som försöks uppnås i varje steg kommer här en bevisuppsättning som förklarar vad beviset går ut på.

Vi kommer följa följande bevis schema hämtat ur [1].

1. **Anta att satsen är falsk:** Vi antar att satsen är inste stämmer, och då finns en ekvation på exponentialform som visar att talet i fråga är algebraiskt.

2. **Definiera ett tal J:** Definiera ett polynom, eller en mängd polynom f och ett till dessa associerat tal J (eller en sekvens av tal) som är en linjärkombination av värdena till I.

3. **Härled en undre gräns för J:** Analysera J för att visa att det är ett noll skiljt heltal och härled en undre gräns för J.

4. **Härled en övre gräns för J:** Utnyttja ekvation (14) för att härleda en övre gräns för J.

5. **Notera motsägelse:** Notera att den övre gränsen är lägre än den undre gränsen, vilket motbevisar det första antagandet.

6 Transcendentaliteten av e

Innan vi går vidare med Lindemann-Weierstrass sats kollar vi på ett något enklare specialfall, och bevisar denna med samma metodik som för Lindeman-Weierstrass sats.

Sats 6.1. *Talet e är transcendentalt.*

6.1 Anta att satsen är falsk

Vi antar att satsen är inte stämmer, och då finns en ekvation på exponentialform som visar att talet i fråga är algebraiskt.
Vi antar att e är algebraiskt och vi har därmed att:

$$q_0 + q_1 e + \dots q_n e^n = 0 \tag{15}$$

för några heltal $q_1, \dots, q_n$, $n > 0$ och $q_n \neq 0$.

6.2 Definiera ett tal J

Definiera ett polynom, eller en mängd polynom f och ett till dessa associerat tal J (eller en sekvens av tal) som är en linjärkombination av värdena till I.

Vi sätter:

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdot \dots \cdot (x-n)^p$$

med p som något stort primtal, och ska nu utveckla en motsägelse för:

$$J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + \dots + q_n I(n),$$

där $I(t)$ defineras som i avsnitt 5.5, alltså:

$$I(t) = \int_0^t e^{t-x} f(x) dx = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t),$$

där $m = (n+1)p - 1$. Från ekvation (13) och (15) har vi att:

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{k=0}^{n} q_k I(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} q_k \left(e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(q_k e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - q_k \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \right) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} q_k e^t \right)}_{=\ 0 \text{ enl. ekv. (15)}} \left(\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) \right) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} q_k f^{(j)}(t) \\
&= -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(k)
\end{aligned}$$

6.3 Härled en undre gräns för J

Analysera J för att visa att det är ett noll skiljt heltal och härled en undre gräns för J.

Vi betraktar nu värdena för $f^{(j)}(k)$ och noterar att vi har fyra olika fall:

- För $j < p$, $k > 0$; alla termer att innehålla en faktor $(x - k)$ och därmed är $f^{(j)}(k) = 0$.
- För $j < p - 1$, $k = 0$; alla termer innehåller en faktor x och $f^{(j)}(k) = 0$.
- För alla övriga värden på j och k, förutom $j = p - 1$, och $k = 0$, kommer alla nollskjilda termer innehålla en faktor $p!$ (som en följd av upprepad derivering). Därmed är då $f^{(j)}(k)$ delbart med $p!$.
- Slutligen har vi $j = p - 1$, $k = 0$ för vilken vi har att:

  $$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

  och är därmed ett heltal delbart med $(p-1)!$.

Följaktligen är därmed J ett nollskjilt tal och $|J| \geq (p-1)!$.

6.4 Härled en övre gräns för J

Utnyttja ekvation (14) för att härleda en övre gräns för J.
Då $\bar{f}(x)$ är definierat sådant att om $f(x) = \sum a_i x^i$ så är $\bar{f}(x) = \sum |a_i| x^i$ och det gäller att:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\leq \bar{f}(x) \\
&= x^{p-1}(x+1)^p \cdot \ldots \cdot (x+n)^p \\
&= x^{p-1}\left(\frac{(x+n)!}{x!}\right)^p \\
&\leq n^{p-1}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^p \\
&\leq n^{p-1}\left((2n)^n\right)^p \\
&= 2^{np} \cdot n^{np+p-1} \\
&\leq (2n)^m
\end{aligned}
$$

Utnyttjandes uppskattningen $\bar{f}(k) \leq (2n)^m$ tillsammans med ekvation (14) får vi:

$$|J| \leq |q_1|e\bar{f}(1) + \cdots + |q_n|ne^n\bar{f}(n) \leq c^p$$

för något c oberoende av p.

6.5 Notera motsägelse

Notera att den övre gränsen är lägre än den undre gränsen, vilket motbevisar det första antagandet.

Vi har nu att:

$$(p-1)! \leq |J| \leq c^p$$

Uppskattningen är inkonsekvent för stora p. Utnyttjandes lemma 5.3 ser vi att:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{c^p}{(p-1)!} = c \cdot \lim_{p\to\infty} \frac{c^{p-1}}{(p-1)!} = c \cdot 0 = 0$$

Denna motsägelse bevisar satsen. □

7 Lindemann-Weierstrass sats

Vi har nu tillräckligt med förkunskap för att kunna ge oss på Lindemann-Weierstrass sats (sats (1.1)).

Vi bevisar satsen med samma bevisuppsättning som tidigare.

7.1 Anta att satsen är falsk

Anta att satsen är falsk och då finns en ekvation på exponentialform som visar att talet i fråga är algebraiskt.

Vi börjar med att anta att satsen inte stämmer, så att:

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0 \tag{16}$$

Vi visar först att följande slutsatser kan dras om koefficienterna β_i respektive exponenterna α_i som vi kommer att använda oss av senare i beviset:

- Koefficienterna β_i kan antas vara heltal.
- Exponenterna α_i kan antas utgör en komplett mängd konjugat.
- Om α_i och α_j är konjugat så antas att $\beta_i = \beta_j$.

Koefficienterna kan antas vara heltal:
Om de inte redan är heltal får vi detta genom att ta det givna uttrycket och systematiskt ersätta en eller flera av koefficienterna med deras konjugat (för konjugat se avsnitt (5.1)). Tar vi nu alla sådana summor och multiplicerar dem med ursprungsuttrycket fås nu en summa på samma form, men där β_i:na är nu rationella tal. Och eftersom en av faktorerna är 0 så är hela uttrycket 0.

Exempel 1. Vi illustrerar principen med en kortare summa:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}e^3 + 5e^7$$

Vi noterar att konjugatet till $\sqrt{2}/3$ är $-\sqrt{2}/3$ och vi får:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}e^3 + 5e^7\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}e^3 + 5e^7\right) = -\frac{2}{9}e^6 + 25e^{14}$$

Multiplikation med minsta gemensamma nämnare ger nu en ekvation (16) med $\beta_i \in \mathbb{Z}$.

Exponenterna α_i utgör en komplett mängd konjugat,

Om α_i α_j är konjugat så är $\beta_i = \beta_j$:
För att visa detta väljer vi ett polynom med heltalskoefficienter sådant att

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_N$ är samtliga rötter. Vi låter nu $\beta_{n+1} = \cdots = \beta_N = 0$ och vi kan nu skriva att:

$$\prod_{\sigma \in S_N} (\beta_1 e^{\alpha_{\sigma(1)}} + \cdots + \beta_N e^{\alpha_{\sigma(N)}}) = 0.$$

Produkten är noll i enlighet med ursprungsantagandet ekvation (16). Expanderar man uttrycket får man en summa med termer på formen

$$k_i e^{h_1\alpha_1 + \cdots + h_N\alpha_N}$$

där k_i:na är heltals koefficienter. Det följer av konstruktionen att mängden av alla exponenter på den formen, $h_1\alpha_1 + \cdots + h_N\alpha_N$, utgör en komplett mängd konjugat.

Det följer ur symmetrin i produkten att för något $\tau \in S_N$ har $e^{h_1\alpha_{\tau(1)} + \cdots + \alpha_{\tau(N)}}$ samma koefficient som $e^{h_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_N}$. Detta innebär att om α_i och α_j är konjugat så är $\beta_i = \beta_j$.

Vi notera även att uttrycket inte är identiskt noll, alltså, efter att ha samlat alla termer med samma exponenter kommer åtminstone ett utav β_i:na vara nollskilt. Detta kan bekräftats genom att betrakta koefficienten för termen högst exponent enligt ordningen för komplexa tal alltså för $z = x + iy$ är $z_1 < z_2$ om $x_1 < x_2$ eller $x_1 = x_2$ och $y_1 < y_2$. Då α_i:na är unika, ty polynomet är irreducibelt, så finns det endast en term med denna högsta koefficient, och dess koefficient är enligt denna konstruktionen nollskild.

Hitintills har vi alltså att:

- $\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0$
- Koefficienterna, β_i, kan antas vara heltal.
- Exponenterna, α_i, utgör en komplett mängd konjugat.
- Om α_i och α_j är konjugat så är $\beta_i = \beta_j$.

7.2 Definiera en sekvens av tal J

Definiera ett polynom, eller en mängd polynom f och ett till dessa associerat tal J (eller en sekvens av tal) som är en linjärkombination av värdena till I.

Då α_i, β_i är algebraiska kan vi välja ett positivt heltal l sådant att $l\alpha_1, \ldots, l\alpha_n$ och $l\beta_1, \ldots, l\beta_n$ är algebraiska heltal, låt:

$$f_i(x) = \frac{l^{np}\{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)\}^p}{(x-\alpha_i)}, \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Där p är ett (stort) primtal. Vi vill nu utveckla en motsägelse för $|J_1 \cdots J_n|$, där

$$J_i = \beta_1 I_i(\alpha_1) + \cdots + \beta_n I_i(\alpha_n), \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Där $I(t)$ är definierad som i avsnitt 5.5. Utnyttjandes ekvation (13) och (16), ser vi att:

$$\begin{aligned}
J_i &= \sum_{k=1}^{n} \beta_k I_i(\alpha_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_k e^{\alpha_k} \sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(0) \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_k \sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(\alpha_k) \right) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k e^{\alpha_k} \right)}_{0 \text{ enl. antagandet.}} \left(\sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(0) \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_k \sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(\alpha_k) \right) \\
&= -\sum_{j=0}^{np-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_k f_i^{(j)}(\alpha_k) \right)
\end{aligned}$$

7.3 Härled en undre gräns för J

Analysera J för att visa att det är ett noll skiljt heltal och härled en undre gräns för J.

Betrakta värdena för $f_i^{(j)}(\alpha_k)$ och notera att vi har tre olika fall att observera:

- Om $j < p-1$; så försvinner inte fakorerna $(x - \alpha_k)$ helt i f_i under deriveringen och $f_i^{(j)}(\alpha_k) = 0$ för alla k.

- Om $j \geq p$; så är de termer i $f_i^{(j)}(\alpha_k)$ som är noll-skilda de termer där $(x - \alpha_k)^p$ blivit helt bortderiverade, dessa termer har därmed en ledande koefficient som är en multipel av $p!$

- Om $j = p-1$; i detta fallet kan endast $(x - \alpha_i)$ termen helt försvinna (då den är av grad $p-1$) i någon term i $f_i^{(j)}(x)$, och $f_i^{(j)}(\alpha_k) = 0$ för $k \neq i$. I fallet $j = p - i$ och $k = i$ har vi att:

  $$f_i^{(p-1)}(\alpha_i) = l^{np}(p-1)! \prod_{k \neq i} (\alpha_i - \alpha_k)^p \tag{17}$$

  Detta är, om p är tillräckligt stort, ett algebraiskt heltal (enligt sats 5.2) delbart med $(p-1)!$ men inte med $p!$. I mod $p!$ är alltså

  $$J_i = -\beta_i f_i^{(p-1)}(\alpha_i) \neq 0 \pmod{p!}$$

Det följer alltså att J_i är ett nollskilt algebraiskt heltal delbart med $(p-1)!$ men inte med $p!$.

Eftersom $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ var en komplett uppsättning konjugat så kan man ordna dem så att det finns heltal $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_r = n$ sådana att varje mängd $\alpha_{n_t+1}, \ldots, \alpha_{n_{t+1}}$ är en komplett uppsättning konjugat för varje t och det följer därmed, för de tillhörande koefficienterna, att $\beta_{n_t+1} = \cdots = \beta_{n_{t+1}}$. Därmed kan J_i skrivas på följande sätt:

$$J_i = -\sum_{j=0}^{mnp-1} \sum_{t=0}^{r-1} \beta_{n_{t+1}} \{f_i^{(j)}(\alpha_{n_t+1}) + \cdots + f_i^{(j)}(\alpha_{n_{t+1}})\}$$

Notera att då varje $f_i(x)$ fås av att dela ett polynom, med heltalskoefficienter, med $(x - \alpha_i)$ och tänker man igenom divisionsalgoritmen kan $f_i(x)$ skrivas på formen:

$$f_i(x) = \sum_{m=0}^{np-1} g_m(\alpha_i) x^m$$

där g_m är ett polynom, med heltalskoefficienter, oberoende av i. Det samma gäller för f's derivator $f_i^{(j)}$.

Därmed är, $f_i^{(j)}(\alpha_{n_t+1}) + \ldots f_i^{(j)}(\alpha_{n_{t+1}})$ ett polynom med heltalskoefficienter. Detta ser vi genom att gruppera ihop de $\alpha_{n_t+1}, \ldots, \alpha_{n_{t+1}}$ termerna i uttrycket som har samma exponenter och därefter utnyttja elementära symmetriska polynom och faktumet att $\alpha_{n_t+1}, \ldots, \alpha_{n_{t+1}}$ är en komplett mängd konjugat.

Det samma är sant, på samma vis, för J_i, säg exempelvis, $J_i = G(\alpha_i)$, där G är ett polynom med heltalskoefficienter oberoende av i.

Slutligen är då $J_1 \cdot \cdots \cdot J_n = G(\alpha_1) \cdot \cdots \cdot G(\alpha_n)$ ett rationellt tal eftersom produkten är ett symmetriskt polynom i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, se sats 5.1. Men då J_i är ett algebraiskt heltal måste det även vara ett heltal, enligt lemma 3.1, och därmed åtminstone 1. Och vi har att:

$$J_1 \cdot \ldots \cdot J_n \in \mathbb{Z} \quad \text{och därmed ett nollskjilt heltal delbart med } ((p-1)!)^n$$

Och därför gäller det att:

$$|J_1 \cdot \ldots \cdot J_n| \geq ((p-1)!)^n$$

7.4 Härled en övre gräns för J.

Utnyttja ekvation (14) för att härleda en övre gräns för J.

Men ekvation (14) ger:

$$|J_i| = \sum_{k=1}^{n} \beta_k I(\alpha_k) \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_k| e^{|\alpha_k|} \bar{f}(|\alpha_k|) \leq c^p$$

för något tillräckligt stort c oberoende av p. Vi har totalt nu följande olikhet:

$$((p-1)!)^n \geq |J_1 \cdot \ldots \cdot J_n| \geq (c^p)^n$$

7.5 Notera motsägelse

Notera att den övre gränsen är lägre än den undre gränsen, vilket motbevisar det första antagandet.

Men för tillräckligt stora p är $(p-1)! \geq c^p$ oberoende av val av c.

$$\lim_{p\to\infty} \frac{c^p}{(p-1)!} = c \cdot \lim_{p\to\infty} \frac{c^{p-1}}{(p-1)!} = c \cdot 0 = 0$$

Med andra ord den lägre gränsen för produkten över J_i större än den övre gränsen, detta är en motsägelse, vilket bevisar satsen. □

8 Konsekvenser av Lindemann-Weierstrass sats

Vi kommer nu gå in på tre enkla sätt att utnyttja Lindemann-Weierstrass sats för att visa att andra tal är transcendentala. De tre sätten är; att utgår från exponenterna α_i, att utgår ifrån koefficienterna β_i och att skriva om talet så att man återfår ekvationen från satsen.

8.1 Exponenterna

Vi kan från exponenterna, α_i, i Lindemann-Weierstrass sats visa att ett tal är transcendentalt. Från satsen har vi att α_i skall vara ett algebraiskt tal, om vi därmed kan sätta talet som vi vill undersöka som en av exponenterna och sedan visa att uttrycket bryter "skilt från-tecknet" i satsen så följer det att talet måste vara transcendentalt.

Sats 8.1. *π är ett transcendentalt tal.*

Bevis. Vi kan lätt se detta, via Eulers identitet;

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Detta kan skrivas om enligt följande:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \Rightarrow 1 \cdot e^{i\pi} + 1 \cdot e^0 = 0$$

För att detta skall vara konsekvent med Lindemann-Weierstrass sats måste minst ett av talen $0, 1, \pi, i$ vara transcendentala. Då talen $0, 1, i$ är trivialt algebraiska följer att π måste vara transcendentalt. □

Sats 8.2. $\ln(a)$ *är transcendentalt för algebraiska a skiljda från 0 och 1.*

Bevis. Vi antar att $\ln(a)$ är algebraisk och observerar uttrycket:

$$1 \cdot e^{\ln(a)} - a \cdot e^0 = 0$$

Och vi ser att detta är en motsägelse, $\ln(a)$ är alltså transcendentalt. □

8.2 Koefficienterna

I likhet med tillvägagångssättet med exponenterna kan vi visa att ett tal är transcendentalt genom att utgå ifrån koefficienterna i uttrycket från Lindemann-Weierstrass sats. Då vi har ifrån satsen att β_i är ett algebraiskt tal, kan vi genom att välja att sätta det tal som skall undersökas som en utav koefficienterna. Om vi därefter kan konstruera ett uttryck som bryter "skilt från-tecknet" följer det att det undersökta talet är transcendentalt.

Sats 8.3. $\sin(a), \cos(a), \tan(a)$ *är transcendentala för algebraiska $a \neq 0$.*

Bevis. Från Eulers formel har vi att:

$$\cos(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$$

Vi har därmed

$$(2\cos(a))e^{ia} - e^{-2ia} - e^0 = \left(e^{ia} + e^{-ia}\right) e^{ia} - e^{-2ia} - 1 = 0.$$

Vilket enligt Lindemanns sats därmed visar att $\cos(a)$ är transcendentalt, väljer vi $a = 0$ är exponenterna inte olika, vilket de enligt Lindemann-Weierstrass sats skall vara. $\tan(a)$ kan på liknande vis visas vara transcendentalt då:

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = i\frac{e^{-ia} - e^{ia}}{e^{-ia} + e^{ia}}$$

Och därmed får vi att:

$$(\tan(a) - i)e^{ia} + (\tan(a) + i)e^{-ia} = 0$$

Vilket visar att $\tan(a)$ för alla algebraiska $a \neq 0$ är transcendentalt. $\sin(a), \csc(a), \sec(a), \cot(a)$ kan visas analogt. □

8.3 Cirkelns kvadratur

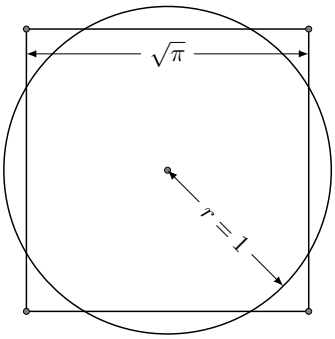
Cirkelns kvadratur var länge ett av de stora olösta matematiska problemen. Detta problem bevisades vara olösligt i och med beviset för π's transcendentalitet 1882, vilket är en följd av Lindemann-Weierstrass sats.

Själva problemet är ett geometriskt konstruktionsproblem. Utmaningen är att, med hjälp av en passare och en linjal, konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel. Intresset av att approximera en cirkel med en kvadrat han funnits med redan sedan den babyloniska matematiken, och i förlängningen handlar det om att approximera π med ett rationellt tal. Tänker man sig att radien för cirkeln är 1, får man att cirkelns area blir π. Den sökta kvadraten skall alltså ha arean π, vilket ger den sidlängden $\sqrt{\pi}$. Problemet kan alltså kokas ner till att konstruera en sträcka med längden $\sqrt{\pi}$.

Vi kan nu titta lite på vad för begränsningar som medförs av att alla tal skall kunna konstrueras med linjal och passare. Vi kalla de tal som går att konstruera på detta vis för "konstruerabara tal".

Definition 8.1. *De konstruerbara talen är alla de talen ur $\mathbb{C}$ som utgående från en given längd 1 kan skapas med hjälp av en passare och en linjal.*

Man kunde med hjälp av passare och linjal addera en längd till en annan, subtrahera en längd från en annan, multiplicera två längder med varandra, dela två längder med varandra och ta roten ur en given längd (samtliga av dessa räknesätt är representerade i figur 2).



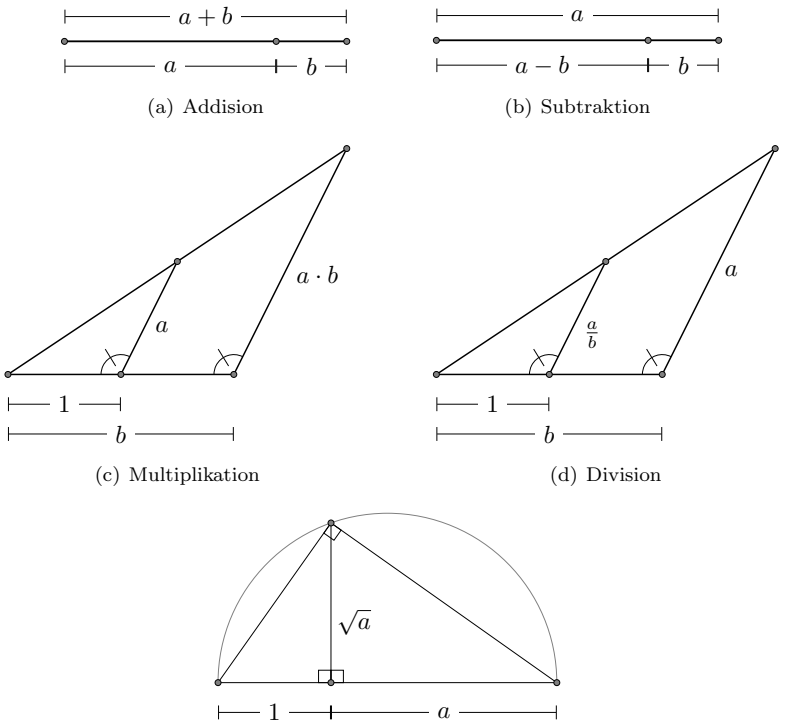
Figur 1: Visuell representation av cirkelns kvadratur

Sammanfattningsvis gäller att om a och b är konstruerbara sär är även $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $^a/_b$ och $\sqrt{a}$ konstruerbara tal.

Än så länge har vi alltså inte något problem, vi söker $\sqrt{\pi}$ och kvadraträtter går att konstruera. Problemet kan alltså nu kokas ner till att visa om π är konstruerbart.

Precis som för de transcendentala kan det vara svårt att visa huruvida ett sökt tal är konstruerbart eller inte, och bara för att man inte hittar en konstruktion så betyder inte det att det inte går att konstruera. Det har alltså länge varit ett problem att avgöra huruvida π och därmed $\sqrt{\pi}$ är konstruerbart.

De konstruerbara talen är dock en delmängd till de algebraiska talen. Lindemann-Weierstrass sats visar att π är transcendentalt, och därmed inte algebraiskt och därmed inte heller konstruerbart.



(a) Addision

(b) Subtraktion

(c) Multiplikation

(d) Division

(e) Kvadratroten

Figur 2: Representation av tillåtna räknesätt

9 Sammanfattning

I uppsatsen har vi undersökt Lindemann-Weierstrass sats. Vi har förklarat nödvändiga satser och termer för att förstå beviset av satsen och undersökt några konsekvenser utav satsen.

Bland annat har vi utträtt att ett transcendentalt tal är ett tal som inte är ett algebraiskt tal. Ett algebraiskt tal är en lösning till het heltalspolynom. Alltså:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

där $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.
De transcendentala är en delmängd till de komplexa talen och utgör, då de är oupräkneliga, i stort sett alla komplexa tal. Trotts detta är det svårt att visa huruvida ett tal som, inte är trivialt algebraiskt, är algebraiskt eller transcendentalt. Med hjälp av Liouvilles sats har vi visat hur man konstruera transcendentalt tal. Satsen lyder:

Sats 3.5 (Liouvilles sats)**.** *För något tal α av grad $n > 1$, finns ett $c = c(\alpha) > 0$ sådan att $|\alpha - {}^{p}/_{q}| > {}^{c}/_{q^n}$ för alla rationella tal ${}^{p}/_{q}, (q > 0)$.*

Med vilken talet

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} \approx 0,110001000000000000000001...$$

kunnat konstrueras och visats vara transcendentalt.
Med hjälp av Lindemann-Weierstrass sats har vi visat att en stor del av de mer kända transcendentala talen faktiskt är transcendentala. Satsen lyder:

Sats 1.1 (Lindemann-Weierstrass sats)**.** *För olika algebraiska tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ och nollskilda algebraiska tal $\beta_1, \ldots, \beta_n$, har vi att*

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0.$$

Utifrån Lindemann-Weierstrass sats följer det per automatik att e är transcendentalt. Men vi kan även härled att följande tal är transcendentala:

- π
- $\ln(a)$, $a \in \mathbb{A}\backslash\{0, 1\}$
- $\sin(a), \cos(a), \tan(a), \csc(a), \sec(a), \cot(a)$, $a \in \mathbb{A}\backslash\{0\}$.

Referenser

[1] Alan Baker. *Transcendental Number Theory*. Cambridge University Press, 1975.

[2] Norman L. Biggs. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2002.

[3] Alexander O. Gelfond. *Transcendental & Algebraic Numbers*. Dover Publications, 1960.

[4] Serge Lang. *Introduction to Transcendental Numbers*. Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[5] Ivan M. Niven. *Irrational Numbers*. Cambridge University Press, 1956.

[6] Arne Persson och Lars-Christer Böiers. *Analys i en variabel*. Studentlitteratur, 2001.

[7] Hans Rademacher and Otto Toeplitz. *The Enjoyment of Math*. Princton University Press, 1957.

[8] Jean-Pierre Tignol. *Galois' Theory Of Algebraic Equations*. World Scientific Publishing Company, 2001.