



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Analysens historia

av

Samer Ibrahim

2018 - No K29

Analysens historia

Samer Ibrahim

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Paul Vaderlind

2018

Självständigt arbete i matematik, MM6004
Matematiska institutionen, Stockholms universitet

Analysens historia

Av: Samer Ibrahim

Förord:

Som en blivande gymnasielärare i matematik och fysik vet jag att en stor del av den matematik gymnasieelever läser är matematisk analys. De två främsta delar som elever lär sig inom matematisk analys är derivering och integrering. Dessa två har en tydlig koppling vilket är viktigt att inte bortse ifrån. Jag har därför valt att skriva om dessa två centrala delar i denna uppsats.

När jag själv studerade på gymnasiet var jag av uppfattningen om att derivering och integrering var alltid en del av matematiken. Jag är säker på att jag inte var ensam om att dela den uppfattningen. Nu när jag studerat och lärt mig hur det är vill jag skriva detta arbete för att ge en tydlig bild av hur händelserik deriveringens och integreringens historia och utveckling varit. Elever bör ha kännedom om varifrån matematiken de studerar härstammar från samt dess utveckling. Idag lär sig inte elever historien bakom det som studeras vilket leder till att flera matematikers hårda arbete och upptäckter försummas. Rapporten syftar därför till att elever, som läser mitt arbete, ska minnas och få en chans att uppskatta matematikernas hårda arbete.

För att rapporten ska vara förståelig för gymnasieelever kommer den endast innehålla matematik på gymnasial nivå. De delar som kräver en djupare förståelse av matematik kommer därför inte behandlas i arbetet. För att avgränsa uppsatsen kommer jag endast behandla det arbete matematiker utfört som fått en essentiell del för analysens historia.

Stockholm 8 januari 2016

Samer Ibrahim

Innehållsförteckning:

1. Matematisk analys.....	s. 4
1.1 Vad är matematisk analys?.....	s. 4
1.2 Derivata.....	s. 5
1.3 Integraler.....	s. 7
2. Analysens historia.....	s. 9
2.1 Inledning.....	s. 9
2.2 Derivatans historia.....	s. 10
2.3 Integralens historia.....	s. 25
3. Den moderna Analysens framväxt.....	s. 31
3.1 Newton och Leibniz.....	s. 31
3.2 Newtons och Leibnizs verk och dispyt.....	s. 35
4. Reflektioner.....	s. 38
Referenser.....	s. 39

Kapitel 1

Matematisk analys

1.1 Vad är matematisk analys?

Analysen växte fram under 1600-talet, vilket var under den tid tekniken och fysiken hade sitt genombrott. Under den epoken var det ständigt krig och då användes tunga skjutvapen. Dessa skjutvapen intresserade vetenskapsmän att studera projektilernas banor vilket gjordes med hjälp av analysen [1]. Matematiska verk spreds mycket snabbare i Europa eftersom tekniken för att trycka böcker förbättrades. Med en lättare tillgång till naturvetenskapliga verk, ökades intresset för att lösa de matematiska och fysikaliska problem som fanns på den tiden. Ett matematiskt och fysikaliskt problem på den tiden var projektilernas banor. Problemen kunde endast lösas med hjälp av analysen [1]. I det antika Grekland fanns det flera matematiker som hade stort intresse för att lösa problem som hör till analysen. Genom åren har många matematiker försökt presentera rätta definitioner, satser och metoder för att räkna med derivator och integraler. Det var dock inte först på 1600-talet som en enhetlig och omfattande teori togs fram [2].

Analysen är den gren i matematik som, i stora drag, handlar om processer och ändringar av olika slag. Exempel på detta är att en kanonkulas läge och hastighet ändras från den tid den skjuts iväg tills det att den träffar sitt mål. Analysen löser problem med förändringar och de två vitala verktygen som används för att lösa dem problemen är derivering och integrering [3]. Med hjälp av analysen går det att förutse hur ett system kommer att förändras. Många verklighetsbaserade problem kan lösas genom oändligt många särskilda steg, men med hjälp av analysen kan de lösas på en gång [4].

Analys är, utöver matematiken, essentiell i andra grenar inom naturvetenskap. Det viktigaste redskapet som fysiker använder för att exempelvis beskriva radioaktiva sönderfall, förändringar i tryck och temperatur är analysen. Den moderna fysiken växte fram tillsammans med analysen. Biologer kan även ta hjälp av analysen för att exempelvis beskriva hur en population förändras.

1.2 Derivata [3]:

Under 1630-talet fanns det ett antal geometriska verk som bland annat handlade om bestämmandet av tangenter till kurvor samt det maximala och minimala värdet för funktioner. Det fanns dock ingen effektiv metod som kunde användas för att lösa problemen [1]. Detta kom att bli den grundläggande förutsättningen för att ta fram ett matematiskt verktyg som effektivt kunde lösa problem. Det verktyget kallar vi idag för derivata.

De matematiska problemen elever kan möta idag är exempelvis dessa frågeställningar: Hur fort faller ett föremål? Hur snabbt ökar trycket? Hur mycket ökar volymen? Verktöget som används för att mäta dessa hastigheter för förändringarna, förändringshastigheten, är derivata.

Derivata är en funktion som anger förändringshastigheten för en känd funktion. Det är triviale att bestämma lutningen, riktningskoefficienten, för en rät linje eftersom det inte sker förändringar i räta linjer. I nästa sektion kommer en fördjupning i riktningskoefficienter behandlas. Att bestämma lutningen för en funktionskurva är mer problematiskt eftersom lutningen förändras med positionen på kurvan. När vi arbetar med en liten sektion på kurvan kommer den att se ut som en rät linje. Genom att då välja ut två punkter på linjen kan lutningen bestämmas. Grundprincipen för derivata handlar om att välja ut två punkter på en kurva som närmar sig varandra så mycket att den sektionen på kurvan beter sig som en rät linje [5]. Det blir i detta fall mer triviale att bestämma lutningen.

Hur snabbt en funktion förändras vid en viss punkt $(x_0, f(x_0))$ bestäms genom att ta en närliggande punkt $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ (h är ett litet tal). Ett medelvärde för förändringshastigheten är då: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$; Eftersom h går mot 0 blir resultatet ett precist svar för vad förändringshastigheten är vid punkten $(x_0, f(x_0))$.

Derivatan definieras som gränsvärdet (om det existerar):

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

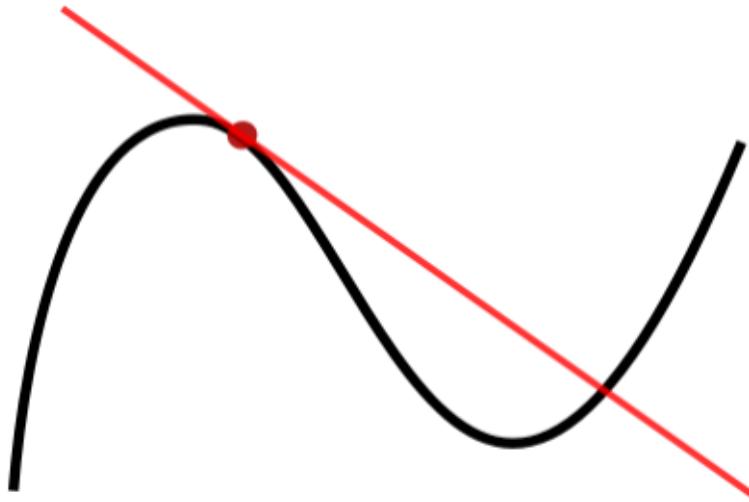
Geometrisk tolkning av derivatan:

Om funktionen f är deriverbar i punkten x_0 , det vill säga om f har en derivata i den punkten, så har funktionen en rät linje som tangerar punkten $(x_0, f(x_0))$. Denna räta linje kallas för tangenten till funktionskurvan $f(x)$ och den har riktningskoefficienten $f'(x)$. Tangenten i punkten $(x_0, f(x_0))$ har ekvationen:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Riktningskoefficienten $f'(x)$ kan även ses som lutningen för funktionskurvan i punkten $(x_0, f(x_0))$.

Figur 1. Derivatan av en funktion vid en specifik punkt [F.1]



Figur 1: Linjen i figuren kallas för tangentlinjen och har lutningen $f'(x)$ just vid den markerade punkten.

Många fysikaliska storheter kan formuleras som derivator av olika funktioner. En av dem är momentanhastigheten v . Sträckan s som ett föremål färdas kan beskrivas som en funktion av tiden t , $s(t)$. Ändringen av sträckan, med avseende på tid, är momenthastigheten v . Om funktionen $s(t)$ deriveras blir resultatet momentanhastigheten $v = s'(t)$. Det kan även skrivas som $v = \frac{ds}{dt}$. Analogt är momentanaccelerationen a ändringen av momentanhastigheten med avseende på tid, det vill säga a är derivatan av $v = s'(t)$, innebär att $a = s''(t)$.

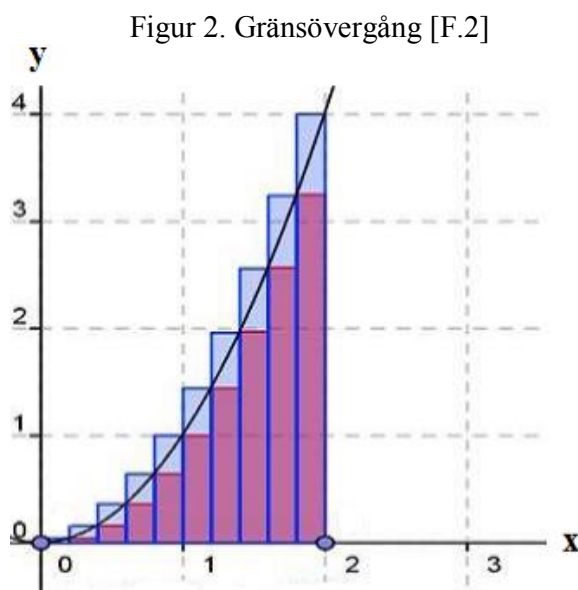
Även strömstyrka I kan uttryckas som förändringen av en elektrisk laddning Q under en viss tid t , det vill säga att $I = \frac{dQ}{dt}$. Det samma gäller för den inducerade spänningen e över en spole med N antal varv i ett magnetfält Φ som ändras under en viss tid t . Inducerade spänningen formuleras med följande uttryck: $e = N \frac{d\Phi}{dt}$ [6].

1.3 Integraler:

Vid år 250 f. Kr. gjorde den antika grekiska matematikern Arkimedes ett stort antal areabestämningar av olika geometriska figurer. Han använde sig av en speciell metod, vilket kommer redogöras för senare i rapporten, vid sina beräkningar. Han var dock tvungen att anpassa metoden efter varje aktuellt problem. Det var först vid 1600-talet som matematiker tog fram ett matematiskt verktyg som kunde användas för alla areabestämningar. Det verktyget kallar vi idag för en integral [3].

Med hjälp av integralteorin ges möjligheten att lösa många geometriska samt fysikaliska problem som exempelvis areor under funktionskurvor, rotationsvolymer, impuls I och tröghetsmomentet J [3].

Det krävs inte mycket geometrisk kunskap för att räkna ut arean av en parallelltrapets eller en annan polygon med fler sidor. Detta för att dess sidor är räta linjer och dess area är den sammansatta arean av flera regelbundna geometriska figurer. Det blir däremot mer komplicerat att räkna ut arean av en figur med krokiga sidor [5]. Om den okända figurens area delas upp i kända figurers areor så blir summan av dessa areor hela figurens area. Detta är grundprincipen för integraler. Exemplet i figur 2 nedan visar en växande funktion. Arean under kurvan, vilket i vårt fall är "den okända figurens area", kan delas in i rektanglar vilka är regelbundna geometriska figurer med lika breda baser. Arean av de ljusare och mörkare rektanglarna utgör den yttre figurens area och kallas för figurens översumma. Arean av de mörkare rektanglarna utgör den inre figurens area och kallas för figurens undersumma. När antalet rektanglar går mot oändligheten kan över- och undersumman närma sig samma tal vilket kallas för gränsvärde. Detta gränsvärde är såväl den okända figurens area som integralen av funktionen [1].



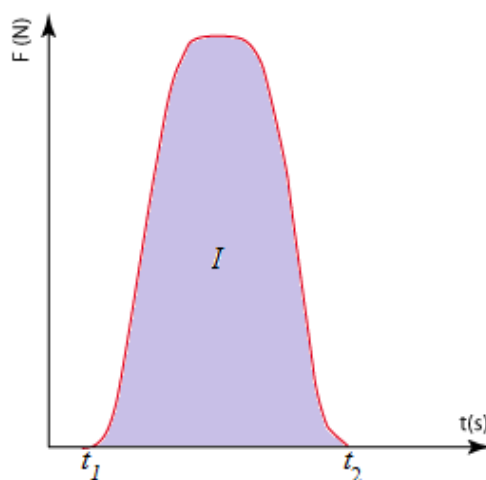
Figur 2: När antalet rektanglar går mot oändligheten, närmar sig över- och undersumman ett gränsvärde. Detta gränsvärde är integralen av funktionen.

Integralen av en funktion $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ är ett tal, ett gränsvärde $I(f)$ om det existerar [3] och skrivs som:

$$I(f) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Många fysikaliska storheter kan formuleras som integraler. Ett exempel på detta är impuls I som är ändringen i rörelsemängden p . Rörelsemängden p talar om hur svårt det är att ändra rörelsetillståndet på ett objekt, därmed formuleras impuls på följande sätt: $I = \int_{t_1}^{t_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$ [6]. Enligt Newtons andra lag: $dp = F(t) dt$, där F är en kraft och intervallet, $[t_1, t_2]$, är tiden som kraften F verkar på ett objekt [6]. Om någon exempelvis sparkar på en fotboll med kraft $F(t)$, under en kort tid $[t_1, t_2]$, så kommer denna kraft att ändras under den tiden. Detta innebär att rörelsemängden ändras. För att bestämma impulsen, ändringen i rörelsemängden, behöver alla värden som kraften har under kollisionen mellan foten och bollen att summeras. Därför används integralen $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$ [6].

Figur 3. Impuls



Figur 3: Kraften $F(t)$ ändras under tiden $[t_1, t_2]$ enligt grafen och impulsen I är arean under grafen.

Observera att rörelsemängden kommer ändras då en konstant kraft verkar på föremålet under intervallet $[t_1, t_2]$.

Tröghetsmomentet, J , talar om hur massan för en roterande kropp är distribuerad längs sin rotationsaxel. Den kan skrivas på följande sätt: $J = \int r^2 dm$, där r är avståndet från rotationsaxeln till kroppens yttre gräns och där dm är masselementet. Tröghetsmomentet, J , beräknas genom att summera alla $m \cdot r^2$ för varje partikel i en kropp ($J = \sum m_i \cdot r_i^2$). Detta är dock ingen effektiv metod då en kropp kan bestå av flera miljarder partiklar. Det skulle vara ineffektivt att räkna $m \cdot r^2$ för varje partikel. $J = \int r^2 dm$ är därför den mest effektiva metoden för att räkna ut tröghetsmomentet [6].

Kapitel 2

Analysens historia

2.1 Inledning:

Historiker har hittat spår av att matematiker, redan i det antika Grekland, diskuterade gränsvärden och infinitesimala (oändligt små) indelningar. Dessa är viktiga delar av differential- och integralkalkylen. Deras verk och slutsatser hade inte kunnat utvecklas till de välformulerade definitionerna, satserna, de precisa bevisen och de användbara metoderna som vi känner till idag [7]. (Det finns dock vissa undantag som till exempel "uttömningsmetoden"). Deras idéer har däremot varit grunden för många matematiker.

Under det antika Grekland hade matematiker även utvecklat vissa metoder för att räkna ut areor och volymer. Det finns antaganden avseende att de behärskade integreringen före deriveringen eftersom matematikerna var angelägna att lösa problem med areor och volymer för geometriska figurer och kroppar. Idag lär sig elever dock derivering före integrering.

Efter antiken låg matematiken på is i Europa med anledning av att det inte hände mycket med matematiken under den perioden. Den perioden kallas för "den mörka tiden" i matematik. Mellan år 300-1100 e.Kr. var det matematiker i Mellanöstern som hade den dominerande kunskapen i matematik. I Europa fanns det inte något större intresse kvar för matematik och områden som naturvetenskap, filosofi, litteratur och teologi värdesattes mer [8]. Europa tog del av matematiska kunskaper som fanns i öst genom handeln. Matematiska verk importerades in och översattes till latin. I samband med att handeln expanderade återupptogs intresset för matematik i Europa. Användning av aritmetiken blev en del av det vardagliga livet för personer utan akademisk bakgrund. På 1400-talet hade tryckpressen sitt stora genombrott och då trycktes matematiska böcker över hela Europa [8].

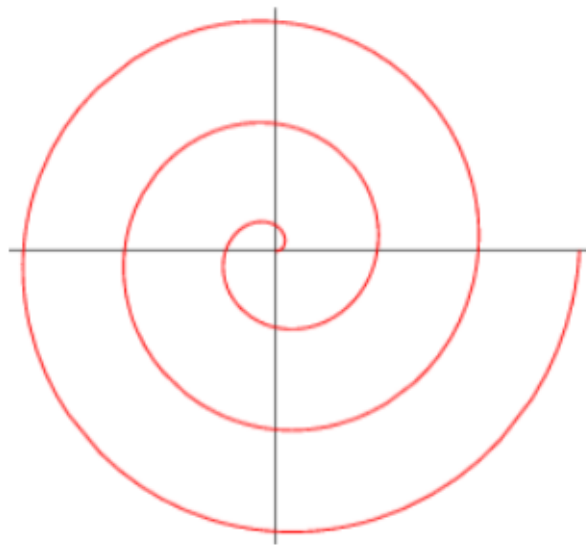
Det var vid 1600-talet som den moderna analysen, vi känner till idag, tog sin form. Under den tiden fanns det revolutionerande satser och metoder för att beräkna derivator och integraler. Många av tidernas mest influensrika matematiker arbetade under denna epok. Det var matematiker som bland annat Newton, Leibniz, Fermat, Descartes och Pascal. Det är välkänt att den moderna matematiken har sin grund inom ett förlopp på 50 år mellan år 1637 – 1687. Det var under år 1637 som Descartes publicerade sitt verk "*Geometri*" och under år 1687 som Newton publicerade sitt verk "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", även kallad "*Principia*" [9]. De grundläggande huvudsatserna för analysen kom vid den epoken med hjälp av Newton och Leibnizs verk, deras verk var oberoende av varandra. De moderna beteckningsformerna som används idag har även sitt ursprung från den tiden [10].

2.2 Derivatans historia:

Det var från det antika Grekland som de första tecknen, som visar att derivator användes, kom ifrån. Matematikern Arkimedes (287 – 212 f.Kr.) försökte bestämma tangenten för en spiral, vilket idag kallas för "Arkimedes spiral" $r = a\theta$. En fördjupning om detta finner ni nedan. r är avståndet från origo, a är en konstant och θ är vinkeln mellan x-axeln och linjen genom en punkt på spiralen och origo. Arkimedes spiral är den kurva som uppkommer då en punkt rör sig med konstant hastighet längs en stråle som startar vid origo och som roterar med en konstant vinkelhastighet. Det innebär att varje stråle som startar från origo skär spiralen i punkter som har ett konstant avstånd mellan sig.

Arkimedes intresse för spiraler väcktes efter det att han ville lösa problemet med cirkelns kvadratur. Han ville, med hjälp av en passare och en linjal, konstruera en kvadrat som har samma area som en given cirkel [11]. Detta kommer behandlas nedan.

Figur 4. Arkimedes spiral [F.3]



Figur 4: Arkimedes spiral har ekvationen $r = a\theta$.

Arkimedes [1]:

Arkimedes var en av de matematikerna under den grekiska antiken som tillförde en hel del genom sina verk. Han var även fysiker, uppfinnare, astronom, filosof och ingenjör [12]. Han levde under 200-talet f.Kr. och föddes i staden Syrakusa som ligger vid Siciliens kust. Det var där Arkimedes verkade mest, men han studerade även i den Egyptiska staden Alexandria. Han dog när Syrakusa föll och togs av Romarna år 212 f.Kr. Arkimedes bestämde ett närmevärde för konstanten π med en metod som påminner om gränsvärden. Detta kommer behandlas nedan.

Tangenten för Arkimedes spiral:

Eftersom Arkimedes spiral uppkommer då en punkt rör sig med konstant hastighet längs en stråle som startar vid origo och som roterar med en konstant vinkelhastighet kunde Arkimedes veta rörelseriktningen för en punkt på spiralen. Rörelseriktningen för en punkt på spiralen är tangenten för Arkimedes spiral [11].

Med hjälp av den moderna differentialkalkylen kan tangenten för spiralen $r = a\theta$ bestämmas på följande sätt: r är avståndet från origo, a är konstant och θ är vinkeln mellan x-axeln och linjen genom en punkt på spiralen och origo [13].

Vi använder polära koordinater: $x = r \cdot \cos \theta$; $y = r \cdot \sin \theta$ och dessa kan skrivas om till: $x = a\theta \cdot \cos \theta$; $y = a\theta \cdot \sin \theta$ eftersom $r = a\theta$.

Riktningskoefficienten k , se sida 5-6, för spiralens tangent är i det här fallet: $k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

Med hjälp av produktregeln för derivering [13] $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ kan $\frac{dy}{d\theta}$ och $\frac{dx}{d\theta}$ bestämmas:

$$\frac{dy}{d\theta} = a\theta \cdot \cos \theta + a \cdot \sin \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\theta \cdot \sin \theta + a \cdot \cos \theta$$

Då är riktningskoefficienten: $k = \frac{a\theta \cdot \cos \theta + a \cdot \sin \theta}{-a\theta \cdot \sin \theta + a \cdot \cos \theta} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$

Genom att skiva tangentens ekvation på formeln $y = k \cdot x + m$, som en rät linje, fastställer vi vad m är (den punkt då linjen korsar y-axeln). Detta gör vi genom att använda riktningskoefficienten k som vi bestämde:

$$y = k \cdot x + m = a\theta \cdot \sin \theta = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta} \cdot a\theta \cdot \cos \theta + m$$

$$m \text{ är: } m = a\theta \cdot \sin \theta - \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta} \cdot a\theta \cdot \cos \theta$$

Gemensam nämnare ger oss:

$$m = \frac{a\theta \cdot \sin \theta \cdot (\cos \theta - \theta \sin \theta) - (\sin \theta + \theta \cos \theta) \cdot a\theta \cdot \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$$

$$m = \frac{a\theta \cdot (\sin \theta \cdot \cos \theta - \theta \sin^2 \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta - \theta \cos^2 \theta)}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$$

$$m = \frac{-a\theta^2 \cdot (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$$

Vi vet att: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ [13], vilket ger oss följande:

$$m = \frac{-a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta}$$

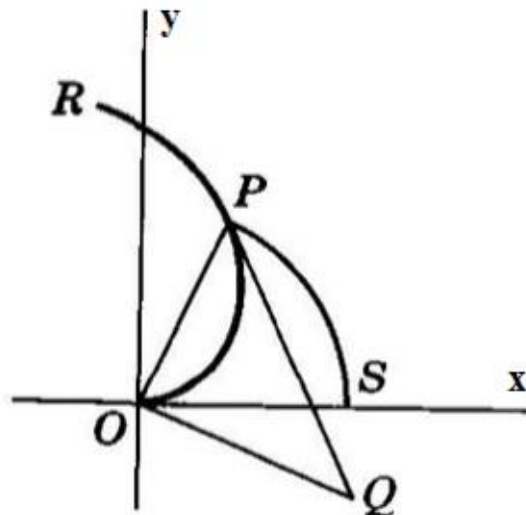
Detta leder till att tangentens ekvation i punkten (x, y) på arkimedes spiral är:

$$y = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} \cdot x - \frac{a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta}$$

Cirkelns kvadratur [11]:

Arkimedes intresse för spiraler väcktes, vilket tidigare nämnts, på grund av hans iver att lösa problemet med cirkelns kvadratur. Hans syfte var att konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel. Det resulterade istället i att han lyckades visa att en rätvinklig triangel har samma area som en given cirkel. Triangeln konstruerade han genom att studera tangenten för Arkimedes spiral. Figuren nedan illustrerar ett segment av en sådan spiral, OPR. Konstruktionen av den rätvinkliga triangeln skedde på följande sätt.

Figur 5. Cirkelns kvadratur [11]



Figur 5: Arkimedes sätt att konstruera en triangel som har samma area som en given cirkel.

Vid punkten P , en punkt på spiralen, ritar han en tangent PQ för spiralen OPR och låter tangenten och sträckan OQ korsa varandra i punkten Q . Det bildas då en rät vinkel mellan OP och OQ . Detta bildar en rätvinklig triangel OPQ . Arkimedes lyckades, genom detta, visa att OQ är lika lång som PS , vilket illustreras nedan. Detta är längden på bågen av cirkelsektorn OPS . Detta visar i sin tur att den rätvinkliga triangelns area och cirkelsektorns area är densamma. Arkimedes visade, på samma sätt, att om OQ var lika lång som hela cirkelns omkrets och OP lika lång som cirkelns radie skulle triangeln OPQ och den givna cirkeln ha samma area [14].

Beräkning av arean för den rätvinkliga triangeln OPQ :

Den räta linjen OP kallar vi för L_1 ; $L_1 = k_1 \cdot x + m_1$

Den räta linjen OQ kallar vi för L_2 ; $L_2 = k_2 \cdot x + m_2$

Vi vet att L_1 och L_2 är vinkelräta mot varandra och därför blir $k_1 \cdot k_2 = -1$. För att beräkna k_1 använder vi den generella formeln: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Vi känner även till att punkten O har koordinaterna $(0,0)$ och att punkten P har koordinaterna $(a\theta \cdot \cos \theta, a\theta \cdot \sin \theta)$ (Vi använder polära koordinater $x = r \cdot \cos \theta; y = r \cdot \sin \theta$ där $r = a\theta$).

$$\text{Detta leder till att: } k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\theta \cdot \sin \theta - 0}{a\theta \cdot \cos \theta - 0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{Det vill säga att: } k_2 = \frac{-1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Vi ser att L_1 och L_2 korsar origo, vilket innebär att $m_1 = m_2 = 0$

$$\text{Detta leder till att ekvationerna för de räta linjerna } L_1 \text{ och } L_2 \text{ är: } L_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot x; L_2 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot x$$

Den räta linjen PQ är vår tangent som nu kallas för L_3 . Denna har redan fastställts på sida 11 och vi har kommit fram till att den uttrycks på följande sätt:

$$L_3 = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} \cdot x - \frac{a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta}$$

För att ta reda på koordinaterna för punkten Q bestämmer vi den punkt då linjerna L_3 och L_2 korsar varandra, det vill säga $L_2 = L_3$:

$$-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot x = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} \cdot x - \frac{a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta}$$

$$\frac{a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} = \left[\frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] x$$

Gemensam nämnare ger oss:

$$\frac{a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} = \left[\frac{(\sin \theta + \theta \cos \theta) \cdot \sin \theta}{(\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta) \cdot \sin \theta} + \frac{\cos \theta \cdot (\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta)}{\sin \theta \cdot (\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta)} \right] x$$

$$\frac{a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} = \left[\frac{\sin^2 \theta + \theta \cos \theta \cdot \sin \theta + \cos^2 \theta - \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta - \theta \cdot \sin^2 \theta} \right] x$$

Förkortning samt att $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ger oss:

$$\frac{a\theta^2}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} = \left[\frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta - \theta \cdot \sin^2 \theta} \right] x$$

$$x = \frac{a\theta^2 \cdot (\cos \theta \cdot \sin \theta - \theta \cdot \sin^2 \theta)}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta}$$

$$x = \frac{a\theta^2 \cdot \sin \theta (\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta)}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta}$$

$$x = a\theta^2 \cdot \sin \theta.$$

Alltså korsar linjerna varandra då $x = a\theta^2 \cdot \sin \theta$.

y-koordinaten för punkten Q får vi genom att sätta in x-värdet som fastställdes i ekvationen L_2 (eller L_1): $y = L_2 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot x$ vilket ger oss: $y = L_2 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot a\theta^2 \cdot \sin \theta$. Vi skriver en förenkling på följande sätt: $y = -a\theta^2 \cdot \cos \theta$. Detta innebär att koordinaterna för punkten Q är $(a\theta^2 \cdot \sin \theta, -a\theta^2 \cdot \cos \theta)$.

För att beräkna arean av triangeln OPQ använder vi formeln: $A_{triangel} = \frac{1}{2}bh$ där b är basen för triangeln och h är höjden för triangeln. I vårt fall är b längden av L_2 och h är längden av L_1 . Detta leder till att: $A_{triangel} = \frac{1}{2}|L_2| \cdot |L_1|$

Längden bestäms genom formeln: $|L| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Detta ger följande ekvationer: $|L_1| = \sqrt{(a\theta \cdot \cos \theta)^2 + (a\theta \cdot \sin \theta)^2} = a\theta$

$$|L_2| = \sqrt{(a\theta^2 \cdot \sin \theta)^2 + (-a\theta^2 \cdot \cos \theta)^2} = a\theta^2$$

Använder vi längderna $|L_2|$ och $|L_1|$, som vi bestämde, kan vi räkna triangelns area: $A_{triangel} = \frac{1}{2}a\theta^2 \cdot a\theta = \frac{1}{2}a^2\theta^3$.

Arean för en cirkelsektor är: $A_{cirkelsektor} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \theta$ där $r = a\theta$, vilket kan skrivas som: $A_{cirkelsektor} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \theta^3$. Cirkelsektorn har samma area som den rätvinkliga triangeln.

Ovanstående visar att den rätvinkliga triangeln och cirkelsektorn har samma area. Observera även att den rätvinkliga triangeln konstruerades genom att använda sig av analysen och bestämningen av tangenten för spiralen. Om OQ var lika lång som hela cirkelns omkrets och OP lika lång som cirkelns radie skulle triangeln OPQ och den givna cirkeln ha samma area [14], vilket nämnts ovan.

Arkimedes metod för att bestämma värdet för π [15]:

De antika grekiska matematikerna var medvetna om att det fanns ett samband mellan cirkelns omkrets O och dess diameter d . De visste även att relationen mellan dem var en konstant k . Arkimedes var matematikern som lyckades bestämma ett närmevärde för denna konstant som idag kallas för π [14]. Metoden grundar sig på att Arkimedes konstruerade en omskriven månghörning vilken har en större omkrets än cirkeln samt en inskriven månghörning som har

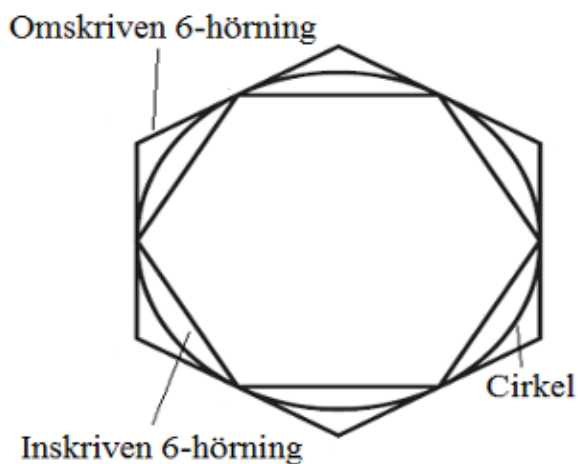
en mindre omkrets än cirkeln, se figur 6 nedan. Då antalet hörn på månghörningarna ökar kommer deras omkretsar närma sig cirkelns omkrets. Med anledning av att den omskrivna månghörningens omkrets alltid är större än cirkelns, kommer dess omkrets vara en övre gräns för cirkelns omkrets. På samma sätt kommer den inskrivna månghörningens omkrets alltid vara mindre än cirkelns vilket innebär att dess omkrets kommer vara en nedre gräns för cirkelns omkrets. Genom detta kunde han bestämma mellan vilka tal π måste vara. Om p_n är omkretsen för en inskriven månghörning med n antal sidor och P_n är omkretsen för en omskriven månghörning med n antal sidor och O är omkretsen för cirkeln följer det att:

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < \dots < p_n < O < P_n < \dots < P_{24} < P_{12} < P_6$$

Arkimedes började med en omskriven och inskriven 6-hörning. Han bestämde deras omkretsar och sedan fördubblade han antalet sidor till en 12-hörning och beräknade deras omkretsar. Arkimedes fortsatte på det sättet tills det att han hade en omskriven och inskriven 96-hörning. Han beräknade därefter deras omkretsar som då var approximativt detsamma som cirkelns omkrets. Approximationen av cirkelns omkrets blir mer korrekt när antalet hörn på månghörningarna går mot oändligheten. De antika grekiska matematikerna tänkte dock att det aldrig kunde göras oändligt många steg i en beräkning. Arkimedes stannade därför vid 96-hörningar. Vi får då följande:

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < p_{96} < O < P_{96} < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6$$

Figur 6. En omskriven och inskriven 6-hörning



Figur 6: Arkimedes började med en omskriven och inskriven 6-hörning som han sedan ökade till 12, 24, 48 och 96-hörning.

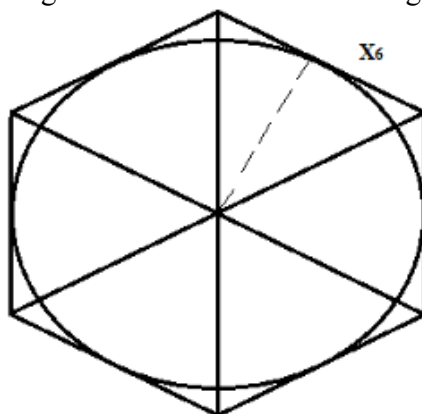
När vi vet omkretsen av de omskrivna och inskrivna 6-hörningarna kan vi använda oss av rekursionsformler p_{2n} och P_{2n} för att bestämma de fördubblade månghörningarnas omkretsar. Beräkningen av p_{2n} och P_{2n} med hjälp av p_n och P_n visar att p_{2n} är det geometriska medelvärdet av p_n och P_{2n} , och där P_{2n} är det harmoniska medelvärdet av p_n och P_n .

$$p_{2n} = \sqrt{p_n \cdot P_{2n}}$$

$$P_{2n} = \frac{2p_n \cdot P_n}{p_n + P_n}$$

Börjar vi med omkretsarna p_6 och P_6 kan vi använda rekursionsformlerna för att bestämma p_{96} och P_{96} . p_6 och P_6 får vi genom att dela in 6-hörningen i 6 liksidiga trianglar och beräkna halva sidan X_6 av en av de 6 sidorna på 6-hörningen för att sedan multiplicera halva sidan med 12 för att få hela omkretsen [1].

Figur 7. En omskriven 6-hörning



Figur 7: Arkimedes delar in 6-hörningen i 6 liksidiga trianglar och beräknade halva sidan X_6 av en av de 6 sidorna på 6-hörningen.

Vi kan bestämma halva sidan X_6 för en liksidig triangel, som vi får genom en indelad omskriven 6-hörning, genom att uttrycka X_6 med cirkelns diameter d . Förhållandet mellan halva sidan X_6 och höjden på triangeln, som är desamma som cirkelns radie r , kan skrivas som: $\frac{r}{X_6} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ [1]. Vi får vidare $X_6 = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Detta leder till att omkretsarna är: $P_6 = 12 \cdot X_6 = \frac{12 \cdot r}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}d$ och på samma sätt bestäms omkretsen $p_6 = 3d$.

Nu använder Arkimedes, utan att redovisa vilken metod han använt, en uppskattning av $\sqrt{3}$ [1]:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Utan att visa hur han gjorde, men som vi kan visa med hjälp av rekursion, kom han fram till att:

$$\left(3 \frac{10}{71}\right) d < p_{96} \text{ och } P_{96} < \left(3 \frac{10}{70}\right) d.$$

Vilket leder till:

$$\left(3 \frac{10}{71}\right) d < p_{96} < 0 = k \cdot d < P_{96} < \left(3 \frac{10}{70}\right) d$$

$$3\frac{10}{71} < k < 3\frac{10}{70}$$

k är den konstanten som vi idag kallar för π . Arkimedes lyckades alltså beräkna att:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Idag vet vi att $\pi \approx 3,14159 \dots$ Arkimedes hade redan på sin tid visat att $3,14085 < \pi < 3,14286$ vilket stämmer väl överens med vår kunskap idag. Detta lyckades Arkimedes visa redan för 2200 år sedan.

Efter Arkimedes tid fram till 1000-talet skedde ingen utveckling av derivator i Europa med anledning av att intresset för matematik avtog. Denna period kallas för, vilket nämnts ovan på sida 9, för ”den mörka tiden” i matematikens historia. Det var mellan år 300 – 1100 e.Kr. [8]. Under den mörka tiden var det matematiker i Asien som verkade och genom deras verk utvecklades derivatan. En persisk matematiker vid namn 'Omar al-Khayyam (1048 – 1131 e.Kr.) studerade lösningar till olika typer av ekvationer och en av dem hade formeln $x^3 + d = bx$. al-Khayyam löste ekvationerna geometriskt och det fanns en annan persisk matematiker vid namn Sharaf al-Din al-Tusi som studerade al-Khayyams ekvationer och kom fram till samma resultat. al-Tusi löste ekvationerna genom att beräkna deras maximala värden [1], vilket kommer behandlas nedan. Idag kan det lösas genom att använda sig av derivator.

Sharaf al-Din al-Tusi [16]:

Sharaf al-Din al-Tusis fulla namn är Sharaf al-Din al-Muzaffar ibn Muhammad ibn al-Muzaffar al-Tusi. Historiker har begränsad kunskap om al-Tusis liv, men de tror att han föddes år 1135 e.Kr. och dog 1213 e.Kr.. Eftersom han kallas för al-Tusi finns det skäl att anta att han föddes i staden Tus vilket är en stad i nordöstra Iran. Han verkade till största delen av sitt liv i städerna Damaskus och Aleppo i Syrien, men även i städerna Mosul och Bagdad i Irak [1].

al-Tusi var en av de persiska matematiker som var aktiv under den ”islamska guldåldern” 600 – 1200 e.Kr.. Han reste runt i arab-världen för att lära ut matematik och många som hörde om honom ville bli hans lärjungar. al-Tusi är känd för sina verk inom algebra och ekvationer. Han hade speciella metoder för att räkna ut antalet lösningar, antalet rötter, som olika typer av ekvationer har.

al-Tusis metod att lösa al-Khayyams ekvation [16] [1]:

al-Tusis studerade 'Omar al-Khayyams ekvation $x^3 + d = bx$ där d och b är positiva tal. Han omvandlade ekvationen till $bx - x^3 = d$ och försökte därefter bestämma var funktionen $bx - x^3 = y(x)$ har sitt maximala värde.

al-Tusi hade noterat att om x är en rot till ekvationen är $x < \sqrt{b}$ för att om $d > 0$ och $x^3 < bx$ så leder det till att $x < \sqrt{b}$. Hans beräkningar visade att funktionen har sitt maximala värde då $x = \sqrt{\frac{b}{3}}$, det vill säga $d = 2\left(\frac{b}{3}\right)^{3/2}$. Idag kan vi visa att detta är korrekt med hjälp av derivering.

al-Tusi kom fram till att om det maximala värdet för $bx - x^3$ är mindre än d , för $d < 2\left(\frac{b}{3}\right)^{3/2}$, så är $bx - x^3 < d$ och ekvationen har således inga positiva lösningar. Om det

maximala värdet för $bx - x^3$ är $d = 2\left(\frac{b}{3}\right)^{3/2}$ så finns en lösning, 1 dubbel-rot $x = \pm\sqrt{\frac{b}{3}}$. Om det maximala värdet däremot är större än d , $d > 2\left(\frac{b}{3}\right)^{3/2}$ finns det två lösningar.

Vi får dessa lösningar om funktionen $bx - x^3 = y(x)$ deriveras och derivatan bestäms till 0. Detta görs för att bestämma ekvationens maximala värde och därefter kan vi lösa ut x :

$$\begin{aligned}y(x) &= bx - x^3 \\y'(x) &= b - 3x^2 = 0 \\3x^2 &= b \\x^2 &= \frac{b}{3} \\x &= \pm\sqrt{\frac{b}{3}}\end{aligned}$$

Den stora utvecklingen i matematisk analys startade omkring 1600-talet. Det var under den tiden som de nya teorierna och de matematiska verken kunde få sitt stora genombrott med anledning av att böcker kunde tryckas [1]. Många stora matematiker arbetade under denna epok, men eftersom många av dessa har utvecklat analysen på något vis äras inte enbart en matematiker [10]. Matematiker som bland annat Isaac Barrow, René Descartes och Pierre de Fermat diskuterade derivata som en metod för att räkna ut tangenter till kurvor och det maximala, största, och det minimala, minsta, värdet för funktioner [7].

Fermat (1601 – 1665 e.Kr.) utvecklade en metod för att kunna fastställa minimala och maximala värden [9]. Han utvecklade även en metod för att bestämma tangenten till olika typer av kurvor vilket behandlas nedan. Fermat var den första som upptäckte att det maximala/minimala värdet för en funktion fastställs när tangenten för en punkt på funktionskurvan är parallell med x-axeln. Detta är när derivatan är 0, vilket stämmer överens med derivatan vi känner till idag [10].

Pierre de Fermat [17] [18]:

Pierre de Fermat var en fransk jurist som föddes år 1601 i kommunen Beaumont-de-Lomagne i södra Frankrike och avled år 1665. Vid sidan av sitt arbete studerade han matematik och presenterade sina resultat oftast utan bevis [1].

Fermat började studera matematik i Bordeaux. Det var där han presenterade sitt verk avseende det maximala och minimala värdet av funktioner. Han är, utöver detta, känd för sitt verk som handlar om geometriska talserier. Det är serier där förhållandet mellan en term och närmast föregående term är konstant [19]. Till exempel är $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$ en geometrisk talserie för att förhållandet mellan en term och närmast föregående term är hela tiden $\frac{1}{2}$.

Fermats metod för att bestämma maximala och minimala värdet av funktioner [9]:

Idag använder vi derivatans definition, se sida 5, för att bestämma lutningen för tangenten av en punkt på en funktionskurva. När tangentens lutning är 0 kan vi beräkna funktionens maximala eller minimala värde vilket påminner om Fermats metod.

För att förklara Fermats metod kan vi anta att vi har en funktion $f(x)$ som beskriver en kurva. Fermat ersatte x med $x + E$ i vilken E är ett väldigt litet tal, infinitesimalt. Han satte $f(x)$ och $f(x + E)$ lika med varandra och förenklade därefter ekvationen samt dividerade alla termer som innehåller E med E . Avslutningsvis satte han E lika med noll.

För att öka förståelsen av Fermats metod ska vi använda denna för att fastställa det maximala eller det minimala värdet för exempelvis funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 2$. Det maximala eller minimala värdet kan fastställas när tangenten för funktionen har lutningen 0.

Vi ersätter x med $x + E$:

$$f(x + E) = (x + E)^2 + 4(x + E) + 2 = x^2 + 2xE + E^2 + 4x + 4E + 2$$

Därefter låter vi $f(x) = f(x + E)$ vilket ger oss följande:

$$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 2xE + E^2 + 4x + 4E + 2$$

Genom att förenkla ekvationen får vi:

$$0 = 2xE + E^2 + 4E$$

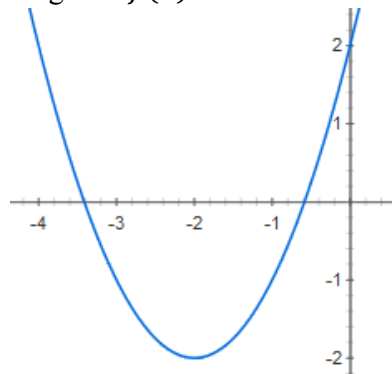
Nu dividerar vi alla termer som innehåller E med E :

$$0 = \frac{2xE + E^2 + 4E}{E} = 2x + E + 4$$

För att fastställa värdet av variabeln x när tangentens lutning är noll sätter vi in $E = 0$. Då får vi: $0 = 2x + 4$.

För att räkna ut det maximala eller minimala värdet ska x lösas ut från $0 = 2x + 4$ vilket ger oss x -koordinaten för den punkt på funktionskurvan då tangenten har lutningen noll. Löser vi ut x får vi $x = -2$ och om vi sätter in värdet för x i $f(x) = x^2 + 4x + 2$ får vi det maximala eller minimala värdet. För $x = -2$ får vi: $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$. Om vi observerar funktionskurvan till funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 2$, se figur 8 nedan, förstår vi att funktionen enbart har ett minimalt värde och inget maximalt värde. Detta leder till att -2 är det minimala värdet för funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 2$.

Figur 8. $f(x) = x^2 + 4x + 2$



Figur 8: Vi ser att en funktion med ekvationen $f(x) = x^2 + 4x + 2$ enbart har en punkt då derivatan är noll och det är vid funktionens minsta värde där $f(-2) = -2$.

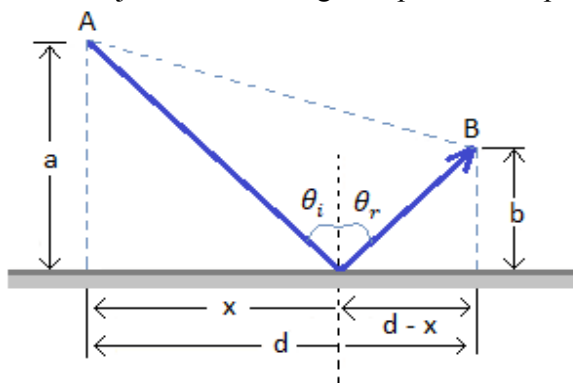
Fermats verk har även präglat optiken, sannolikhetsläran, koordinatgeometrin (analytisk geometri) samt integralkalkylen vilket behandlas senare i arbetet [17].

Fermat framförde en optisk princip, "Fermats princip". Principen handlar om att en ljusstråle väljer den väg, mellan två punkter, som tar kortast tid. Med hjälp av den principen samt derivering kan reflektions- och brytningslagen (Snells lag) härledas [20].

Reflektionslagen [20]:

I figur 9 nedan framställs en ljusstråle som tar sig från punkten A till B på två olika sätt. Den tar sig raka vägen från A till B, men även genom reflektion mot en plan spegel. Enligt Fermats princip kommer ljusstrålen att välja den snabbaste vägen vilket är från A till B (utan reflektion). Om ljuset infaller mot en spegel med vinkeln θ_i , reflekteras med vinkeln θ_r och har avstånden (a, b, x, d) enligt figuren nedan så kan reflektionslagen härledas. Den menar att infallsvinkeln är lika stor som reflektionsvinkeln, det vill säga att $\theta_i = \theta_r$.

Figur 9. Två sätt för en ljusstråle att ta sig från punkt A till punkt B [F.4]



Figur 9: Om ljus reflekteras mot en plan spegel med infallsvinkeln θ_i och reflektionsvinkeln θ_r kan reflektionslagen härledas.

L är den sträckan där ljuset färdas från punkt A till punkt B genom reflektion. Sträckan L kan skrivas som ett uttryck med hjälp av Pythagoras sats samt avstånden vi har i figuren ovan:

$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

Den kortaste tiden det tar för ljuset att färdas från punkt A till B är då sträckan L är som kortast eftersom ljuset har en konstant hastighet. Det vill säga då L har sitt minimala värde. Vi får fram den kortaste sträckan när derivatan av L avseende på x är lika med 0:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r$$

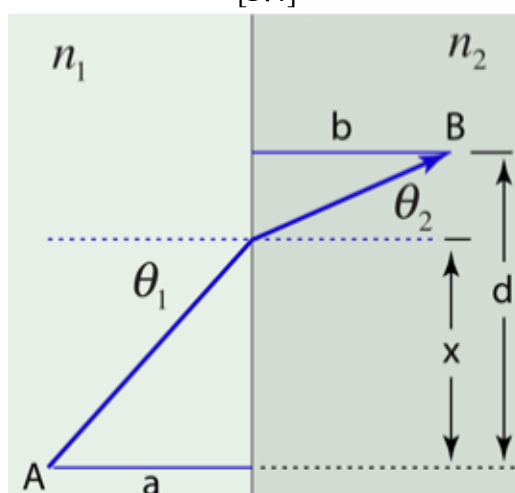
Denna likhet gäller endast när $\theta_i = \theta_r$, vilket är reflektionslagen.

Brytningslagen (Snells lag) [20]:

I figur 10 nedan illustreras en ljusstråle som tar sig från punkt A till B genom att färdas via två olika medier med två olika brytningsindex n_1 och n_2 . Dessa är tal som bestämmer ljusets hastighet i ett medium i förhållande till ljusets hastighet i vakuum [21]. Enligt Fermats princip, vilket förklarats ovan på sida 20, kommer ljusstrålen välja den väg som tar kortast tid. Detta får vi genom att bestämma ett uttryck för den tid t det tar för ljuset att färdas genom punkt A till B . Då derivatan av t är lika med 0 får vi fram den kortaste tiden det tar för ljuset att färdas från A till B .

Brytningsindex kan framställas med följande ekvation: $n = \frac{c}{v}$ där c är ljusets hastighet i vakuum och v är ljusets hastighet i en media. Då ljuset infaller mot det andra mediet med vinkeln θ_1 , bryts med vinkeln θ_2 och har avstånden (a , b , x och d), enligt figuren nedan, kan brytningslagen $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ härledas.

Figur 10. En ljusstråle färdas från A till B genom två medier med två olika brytningsindex [F.4]



Figur 10: Då ljus bryts genom att färdas genom två medier med infallsvinkeln θ_1 och brytningsvinkeln θ_2 kan brytningslagen $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ härledas.

För att skriva ett uttryck för tiden, t , det tar för ljusstrålen att färdas från punkt A till B används formeln för likformig rörelse ($s = v \cdot t$ [22]) samt Pythagoras sats. Detta görs på samma sätt som med reflektionslagen, se sida 20. Följande blir uttrycket för tiden.

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}$$

I uttrycket är v_1 och v_2 ljusets hastighet i de två olika medierna. För att bestämma den minimala tiden det tar för ljuset att färdas från punkt A till punkt B deriverar vi uttrycket för tiden t med avseende på x och sätter det lika med noll:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = 0$$

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} = 0$$

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

Eftersom $v = \frac{c}{n}$ kan vi skriva om uttrycket ovan på följande sätt:

$$n_1 \frac{\sin \theta_1}{c} = n_2 \frac{\sin \theta_2}{c}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Det blir då brytningslagen (Snells lag).

Isaac Barrow (1630 – 1677 e.Kr.) var en annan matematiker som var verksam under 1600-talet. Barrow utvecklade derivatan och han hade en metod för att fastställa riktningskoefficienten för tangenten av en funktionskurva. Detta görs idag med hjälp av derivering och en fördjupning på det tas upp nedan. Han använde sig av gränsvärden och punkter på en triangel, vilket han själv konstruera, som går mot varandra. Den metoden kallas för ”Barrows differentialtriangel” [11].

Isaac Barrow [1] [23]:

Isaac Barrow var en engelsk matematiker som föddes i London år 1630 och avled år 1677 i Cambridge. Han var en professor i grekiska på Cambridge, men även professor i geometri på Gresham universitet. Mot slutet av sitt liv studerade Barrow teologi och var även lärare till den store matematikern och fysikern Isaac Newton. Information om Newton tas upp i kapitel 3 på sida 31.

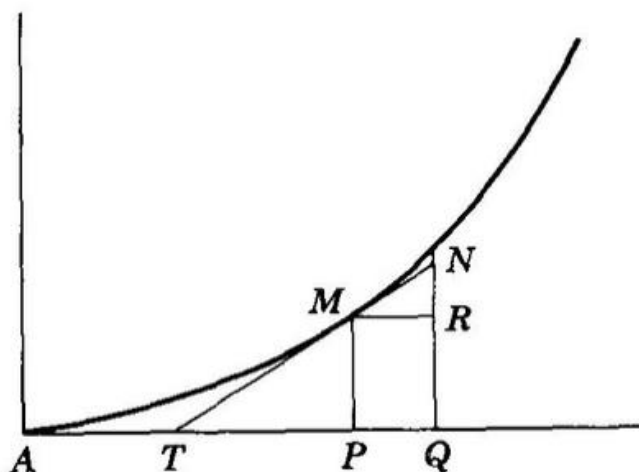
Barrows verk består av hans egna föreläsningsanteckningar som publicerades. En del av dem handlade om grekiska matematiker, som till exempel Arkimedes och en del handlade om optik och geometri. Det var under sina föreläsningar om geometri som Barrow visade sin metod för att fastställa tangenten av funktionskurvor. Detta gjorde han genom att använda sig av sin metod ”Barrows differentialtriangel”. Barrow var en av de första som insåg att integraler och derivator

hade en invers relation [10] vilket idag kallas för "Analysens huvudsats". Barrow kunde inte bevisa denna relation, men det kunde däremot hans elev, Isaac Newton.

Barrows differentialtriangel [11]:

Om M är en punkt på en kurva, se figur 11 nedan, som har ekvationen $f(x, y) = 0$ och om T är den punkt på x-axeln som tangenten MT går igenom menar Barrow att det finns ett infinitesimalt litet avstånd, MN , på den kurvan. (N är på kurvan, men för att det ska bli en tydlig och stor figur ser det ut som om att N inte befinner sig på den.) Därefter drar Barrow vertikala linjer från M och N till x-axeln som korsar två punkter på x-axeln. Dessa punkter kallar han för P respektive Q . Han ritade även en horisontell linje från M till R . Han bestämde, utan vidare förklaring, att kalla avståndet MP för m , TP för t , MR för e och NR för a . Han noterade att förhållandet mellan a och e är samma som förhållandet mellan m och t : $\frac{a}{e} = \frac{m}{t}$ där e och a är mycket små tal (infinitesimala).

Figur 11. Barrows differentialtriangel [11]



Figur 11: Barrow använde triangeln MNR för att fastställa riktningskoefficienten för tangenten av kurvor genom att använda sig av gränsvärden och punkter på en triangel som går mot varandra.

Eftersom e och a är infinitesimala sätter Barrow funktionen $f(x, y)$ lika med $f(x + e, y + a)$. Därefter förenklar han ekvationen och tar bort alla termer som har a eller e med högre grad än 1. Slutligen skriver han om ekvationen tills det att förhållandet $\frac{a}{e}$ är själv på det högra- eller vänstra ledet. I moderna termer skulle förhållandet få följande uttryck: $\frac{a}{e} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Detta är riktningskoefficienten för tangenten av kurvan som vi sökte.

För att tydliggöra på vilket sätt Barrows differentialtriangel används kan vi bestämma riktningskoefficienten för tangenten av en funktionskurva, exempelvis: $f(x, y) = y - x^2 - 2x^3 = 0$:

Vi sätter $f(x, y) = f(x + e, y + a)$:

$$y - x^2 - 2x^3 = y + a - (x + e)^2 - 2(x + e)^3$$

$$y - x^2 - 2x^3 = y + a - x^2 - 2ex - e^2 - 2x^3 - 2ex^2 - 4ex^2 - 4e^2x - 2e^2x - e^3$$

Förenklar vi ekvationen och tar bort termerna som har a eller e med högre grad än 1 får vi:

$$a - 2ex - 2ex^2 - 4ex^2 = 0$$

$$a - 2ex - 6ex^2 = 0$$

$$a = e(2x + 6x^2)$$

Skriver vi om ekvationen på så sätt att förhållandet $\frac{a}{e}$ är ensam det på vänstra ledet får vi:

$$\frac{a}{e} = 2x + 6x^2$$

Förhållandet mellan a och e är: $\frac{a}{e} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 6x^2$ vilket är riktningskoefficienten för tangenten av kurvan $f(x, y) = y - x^2 - 2x^3 = 0$.

Detta kan, på ett enkelt vis, illustreras med hjälp av derivata:

$$f(x, y) = y - x^2 - 2x^3 = 0$$

$$y = x^2 + 2x^3$$

Använder vi deriveringsregler för potenser får vi:

$$y'(x) = 2x + 6x^2$$

Vi har nu, med hjälp av Barrows metod samt med den moderna användningen av derivering, visat att riktningskoefficienten för tangenten av kurvan $f(x, y) = y - x^2 - 2x^3 = 0$ är $y'(x) = 2x + 6x^2$.

2.3 Integralens historia:

Integralkalkylen handlar till stor del om att beräkna volymer och areor på olika typer av former och kroppar. Matematiker i Egypten började arbeta med det runt 1890 f.Kr. De antika egyptierna skrev ned sina verk på papyrus, vilket är en typ av papper som användes i forntida Egypten. Deras beräkningar av areor och volymer, av bl.a. pyramider, finner vi i den så kallade "Moskva-papyrusen" [7].

Moskva-papyrusen [1] [11]:

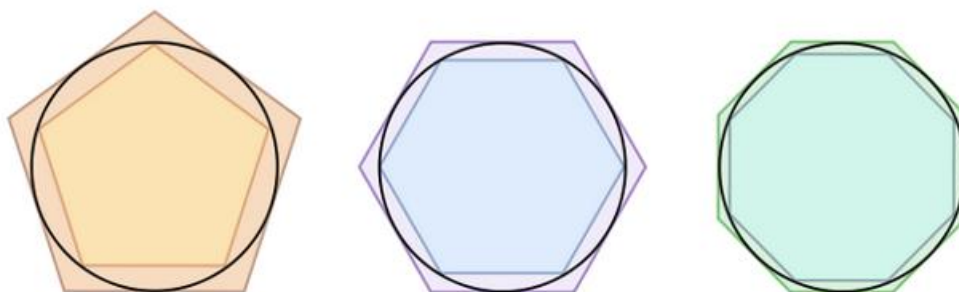
Moskva-papyrusen är ett cirka fem meter långt och en decimeter brett papyrusfynd som har daterats från den tolfte dynastin, cirka 1890 f.Kr., i Egypten.

Detta manuskript består mestadels av vardagliga matematiska problem inom geometrin. Exempel på detta är uträkningar av rektangelns sidor, trianglar, ytan på en sfär samt volymer på olika geometriska kroppar. Moskva-papyrusen är det tidigaste verket som beskriver ett sätt för att räkna ut volymen av en så kallad "stympad" pyramid. En stympad pyramid är en pyramid där toppen har skurits bort i ett horisontellt snitt. Det finns däremot ingen beskrivning av hur volymen för en hel pyramid ska beräknas. Manuskriptet är skriven som en matematikbok för elever och den innehåller uppgifter och problem som ska lösas. I manuskriptet finns det 60 uppgifter, men endast 25 av dessa är bevarade idag.

Beräkningar av areor och volymer utvecklades vidare och i antika Grekland fanns en matematiker vid namn Eudoxos (cirka 400 – 350 f.Kr.) som använde sig av en "uttömningsmetod" ("method of exhaustion"). Denna metod använde han för att räkna ut areor och volymer [7] av olika geometriska former. Metoden påminner om användningen av gränsvärden. Eudoxos metod gick ut på att rita geometriska former inuti den form vars area skulle beräknas. De inritade formernas areor konvergerade mot den arean som egentligen skulle räknas ut och på det sättet kunde arean av den sökta formen räknas ut [24].

När Arkimedes ville räkna ut värdet för π , vilket tidigare redogjorts för på sida 15, använde han ovanstående metod. Detta gjorde han genom att rita ut månghörningar såväl inuti som utanför cirkeln, därefter räknade han ut omkretsen för månghörningarna. Om månghörningarnas areor räknas ut, istället för att räkna ut deras omkrets, kommer 96-hörningen approximativt ha samma area som cirkeln [1].

Figur 12. Uttömningsmetoden [F.5]



Figur 12: För att räkna ut arean av en cirkel användes uttömningsmetoden. Månghörningar ritades inuti cirkeln och i samband med att antalet hörn på månghörningen ökade kunde arean för månghörningen bli lika stor som arean för cirkeln.

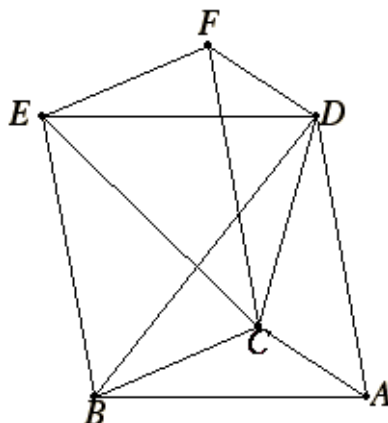
Eudoxos [17] [1]:

Eudoxos var en grekisk matematiker och astronom som föddes i Knidos, dagens Turkiet, cirka 400 f.Kr. och avled cirka 350 f.Kr. Han ägnade sig åt att studera rymdgeometri, vilket är läran om geometriska figurer i tre dimensioner [25]. En stor del av Eudoxos satser, likaså uttömningsmetoden, finns med i det stora matematiska verket från Grekland så kallat *Elementa* av Euklides cirka 300 år f.Kr. Eudoxos var den första som konstaterade att om en pyramid och en prisma har samma bas och höjd så är pyramidens volym en tredjedel av prismans volym.

Eudoxos metod för att visa att pyramidens volym är en tredjedel av prismats volym om pyramiden och prisma har samma bas och höjd [26]:

För att visa att förhållandet mellan dessa två geometriska kroppars volym ritade Eudoxos tre pyramider, $ABCD$, $EBDC$ och $EFDC$, inuti en prisma.

Figur 13. Prismans volym är tre gånger så stor i förhållande till en pyramid med samma bas och höjd [26].



Figur 13: Eudoxos ritade tre pyramider ($ABCD$, $EBDC$ och $EFDC$) inuti en prisma.

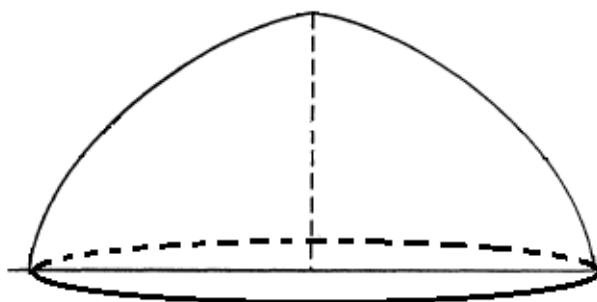
Eftersom $ABED$ är en parallelogram och BD är dess diagonal är trianglarna ABD och EBD kongruenta d.v.s. att de är varandras spegelbilder. Pyramiden $ABCD$ har basen ABD och toppen i punkten C och pyramiden $EBDC$ har basen EBD , vilket är kongruent med ABD . Den har också toppen i punkten C varför dessa två pyramider är lika stora och har samma volym. Enligt sats 5 i tolfte boken av *Elementa* har två pyramider samma volym om de har samma höjd och triangulära bas [27].

På samma sätt som Eudoxos gjorde med parallelogram $ABED$ gjorde han med parallelogram $FCBE$. Trianglarna CEF och CBE är kongruenta, varandras spegelbilder, eftersom CE är parallelogrammens diagonal. Pyramiden $EFDC$ har basen CEF och toppen i punkten D . Pyramiden $EBDC$ har basen CBE , vilket är kongruent med CEF . Den har också toppen i punkten D varför dessa två pyramider är lika stora och har samma volym.

Vi kom tidigare fram till att pyramiderna $EBDC$ och $ABCD$ hade samma volym och nu förstår vi att även $EFDC$ har samma volym som $EBDC$ vilket innebär att $ABCD$ och $EFDC$ har samma volym. Detta leder i sin tur till slutsatsen att alla tre pyramider, som prisma är indelad i, har samma volym. Pyramidens volym är därför en tredjedel av prismans volym.

Likt derivatan hände det inte mycket inom utvecklingen av integraler efter de grekiska matematikernas verk, utan det var de arabiska matematikerna som fortsatte med utvecklingen av integraler [8]. Under 1000-talet var det en arabisk matematiker vid namn Ibn al-Haytham (965 – 1038 e.Kr.) som beslöt sig för att räkna ut arean och volymen av figurer vilka beskrivs som polynom av fjärde graden eller mer [17], det vill säga den högsta exponenten av variabler är fyra eller mer. Ett polynom är en summa av termer innefattande en kombination av positiva heltalspotenser av variabler och heltal [28]. al-Haythams sökande efter arean och volymen av sådana figurer ledde honom till att beräkna volymen för en rotationskropp som fås då ett stycke av en parabel roterar kring symmetrilinjen. Rotationskroppens volym kan beskrivas som ett polynom av fjärde graden [29].

Figur 14. Rotationskropp



Figur 14: Rotationskroppen fås då ett stycke av en parabel roterar kring symmetrilinjen.

al-Haythams metod för att beräkna volymen för en rotationskropp som fås då ett stycke av en parabel roterar kring symmetrilinjen [29] [30]:

Hans metod påminner om Eudoxos "uttömningsmetod", se sida 24, som han kände till. I detta fall använde han dock inskrivna cylindriska skivor och lät dem bli tunnare. I samband med att de cylindriska skivorna blir tunnare närmar sig summan av de inskrivna cylindrarnas volym ett värde vilket är rotationskroppens volym. I och med sin metod lyckades al-Haytham konstatera att volymen för en parabel som roterar kring sin symmetrilinje är $\frac{8}{15}$ så stor som volymen för en omskriven cylinder med samma höjd som parabeln.

Volymen för en cylinder kan beräknas med hjälp av formeln: $V_{cylinder} = \pi \cdot h \cdot r^2$ där r är radien för cylinderns basyta och h är cylinderns höjd. Radien för de inskrivna cylindrarnas basyta är parabelns funktion, det är alltså en kvadratisk funktion, för att uttrycket $f(x) = ax^2 + bx + c$ är en generell funktion för en parabel. För att fastställa volymen för de cylindriska skivorna behöver vi kvadraten av radien. Eftersom radien är en kvadratisk funktion resulterar det i att summan av de cylindriska skivornas volym blir ett polynom av fjärde graden.

al-Haytham använde sig av en parabel med ekvationen $x = ky^2$ som roterar kring linjen $x = kb^2$, enligt figur 15 nedan, där k är en konstant och b är höjden för parabeln. Han delade in rotationskroppen i n lika stora cylindriska skivor där varje inskriven cylinder hade höjden $h = \frac{b}{n}$. Den i :te cylindern har radien $kb^2 - k(ih)^2$ och höjden h , varför volymen för den i :te cylindern blir:

$$V = \pi h (kb^2 - ki^2 h^2)^2 = \pi h (kn^2 h^2 - ki^2 h^2)^2$$

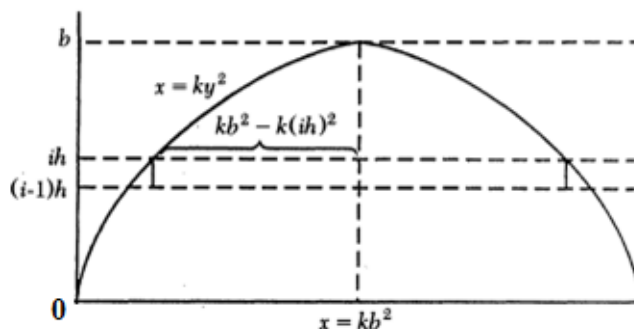
(notera att $b = nh$)

$$V = \pi k^2 h^5 (n^2 - i^2)^2$$

Summan av alla inskrivna cylindrar, som approximerar volymen för rotationskroppen, kan skrivas som:

$$\pi k^2 h^5 \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)^2$$

Figur 15. Al-Haythams metod för att beräkna volymen av en rotationskropp [30]



Figur 15: Ett stycke av en parabel med ekvationen $x = ky^2$ som roterar kring linjen $x = kb^2$.

al-Haytham kände till formeln för summan $\sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)^2$ och beräknade att:

$$\frac{8}{15} (n-1)n^4 < \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)^2 < \frac{8}{15} n \cdot n^4$$

En cylindrisk skiva, av den omskrivna cylindern med samma höjd som parabeln, har volymen $\pi h(kb^2)^2 = \pi k^2 h^5 n^4$, notera att $b = nh$. Hela volymen för den omskrivna cylindern är $\pi k^2 h^5 n \cdot n^4$. Om den översta skivan inte räknas så blir volymen för den omskrivna cylindern $\pi k^2 h^5 (n-1) \cdot n^4$. Detta visar att volymen för rotationskroppens volym är begränsad mellan $\frac{8}{15}$ av den omskrivna cylinderns volym då den översta skivan inte är inräknad och $\frac{8}{15}$ av hela den omskrivna cylinderns volym. Genom att välja ett stort värde för n så kommer den översta skivans volym att approximativt bli 0. Därför förstår vi att rotationskroppens volym är exakt $\frac{8}{15}$ av volymen för en omskriven cylinder med samma höjd som parabeln.

Ibn al-Haytham [17] [29] [31]:

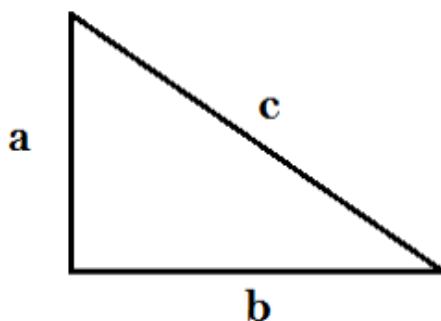
Ibn al-Haythams fulla namn är Abu Ali al-Hassan Ibn al-Haytham, även kallad Alhazen. Han föddes i staden Basra, i södra Irak, år 965 och dog i Kairo, Egypten, år 1038. Han var en arabisk vetenskapsman, matematiker, fysiker, astronom och filosof. Han är känd för att ha skrivit många betydelsefulla verk, främst inom optiken och oftalmologin vilket är läran om ögat och dess sjukdomar [32]. al-Haythams verk inom optik består av hans avhandling på sju volymer, *Kitab al-Manazir* vilket betyder "boken om optik". Han skrev sin avhandling mellan åren 1011 och 1021. I sin avhandling förklarade han att ett objekt blir synligt på grund av att objektet i fråga reflekterar ljus. Dessa ljusstrålar når i sin tur ögat vilket resulterar i att vi kan se objektet. Al-Haytham menade att varje punkt på objektet reflekterar en ljusstråle som träffar varje punkt

på ögat, men att enbart de strålar som träffar ögat vinkelrätt blir de strålar som ögat fångar upp. Detta stämmer dock inte med den kunskapen om optiken som vi känner till idag.

Al-Haythams verk är många och alla kan inte nämnas i denna uppsats. Eftersom jag har avgränsat min uppsats blir hans arbete avseende analys och geometri mest väsentligt. Hans matematiska verk grundade sig på arbetet som utvecklats från det antika Grekland. Han märkte dock att de antika grekiska matematikerna aldrig arbetade med polynom av högre grad än tre vilket ledde till att han ville vara den som skulle upptäcka något nytt. I analysen arbetade han med en metod, vilket nämnts ovan, för att bestämma arean och volymen av geometriska figurer. Dessa kan uttryckas med hjälp av polynom av fjärde graden eller mer.

Al-Haytham utvecklade ett nytt sätt att räkna på inom geometrin. Han var den som införde algebran i geometrin vilket är ett räknesätt vi än idag använder oss mycket av. Sidorna på geometriska figurer kan anges med variabler. Vi skriver exempelvis Pythagoras sats algebraiskt enligt följande formel: $c^2 = a^2 + b^2$ [22]. I denna formel är c hypotenusan och a respektive b är kateterna i en rätvinklig triangel.

Figur 16. Pythagoras sats



Figur 16: al-Haytham införde algebran i geometrin och än idag skriver vi Pythagoras sats enligt följande formel: $c^2 = a^2 + b^2$.

Vilket tidigare nämnts på sida 18 framtogs den moderna integralkalkylen, som vi idag känner till, på 1600-talet. En verksam matematiker under den epoken och som bidrog till utvecklingen av beräkning med integraler var Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647 e.Kr.) [7]. Cavalieri utvecklade en modern metod för att räkna ut arean och volymen för olika former och kroppar. Den metoden påminner om den uttömningsmetod som användes i det antika Grekland. Metoden han utvecklade kallas idag för Cavalieris princip och den metoden kommer behandlas senare i uppsatsen. I och med Cavalieris princip har vi idag en mer utvecklad metod för att räkna ut det som de grekiska matematikerna använde uttömningsmetoden till för att räkna ut [7]. Cavalieri ansåg att integralen för funktioner med formeln x^n var arean under en funktionskurva [11].

Bonaventura Cavalieri [17]:

Cavalieri föddes i Milano år 1598 och dog i staden Bologna, norra Italien, år 1647. Han var en italiensk matematiker samt fysiker som valt inriktning inom optik och kinematik. Kinematik är den del av mekaniken som beskriver kroppars rörelse, oberoende av orsaken till rörelsen [33]. Euklides var den som fick upp Cavalieris intresse av matematiken. Han var en lärjunge till den stora astronomen Galileo Galilei (1564 – 1642 e.Kr.) och blev även professor i matematik i Bologna. I sitt arbete som matematiker utvecklade han en princip för att räkna ut arean och volymen för kroppar. Detta gjorde han genom att dela in dem i segment för att sedan summera

deras area/volym. Det var till stor del Cavalieri som introducerade användningen av logaritmer i Italien genom sin bok *Directorium Generale Uranometricum*.

Cavalieris princip [11]:

Cavalieris princip går att använda när vi arbetar med såväl areor som volymer. Cavalieri kom fram till slutsatsen att två lika höga figurer/kroppar har samma area/volym mot förutsättning att de kan delas in i snitt vilka är parallella med figurens/kroppens bas, om det är lika stort antal segment samt om dessa segment har samma höjd. Det finns alltså tre krav som behöver uppfyllas för att två figurer/kroppar ska ha samma area/volym. Kraven är dessa:

1. Figurerna/kropparna måste vara lika höga.
2. Figurerna/kropparna ska kunna delas in i lika många snitt parallella med figurens/kroppens bas.
3. Segmenten ska vara lika höga.

Två högar mynt, se figur 17 nedan, har samma volym eftersom högarna har lika många mynt av samma sort även om de inte ser identiska ut. Varje mynt kan ses som ett segment som delar mynthögen. Då mynten är lika många och av samma sort resulterar det i att högarna är lika höga (krav 1), de har lika många segment parallella till kroppens bas (krav 2) samt lika höga segment (krav 3). Eftersom högarna med mynten uppfyller de tre uppställda kraven innebär det att de, trots deras icke identiska utseende, har samma volym enligt Cavalieris princip.

Figur 17. Cavalieris princip [F.6]



Figur 17: Två högar mynt har samma volym eftersom högarna har lika många mynt av samma sort även om de inte ser identiska ut.

Cavalieris princip har banat vägen för matematikerna Isaac Newton (1642 – 1727 e.Kr.) och Gottfried Leibniz (1646 – 1716 e.Kr.) vilket underlättat för dem att vidareutveckla integralkalkylen [17]. Deras verk och upptäckter är av stor betydelse för den moderna analysen som vi använder idag. Jag har därför tillägnat ett helt kapitel åt Isaac Newton och Gottfried Leibniz.

Kapitel 3

Den moderna Analysens framväxt

3.1 Newton och Leibniz

De två mest omtalade matematikerna när det kommer till analysens historia är Isaac Newton och Gottfried Wilhelm von Leibniz. Dessa två var med och revolutionerade sättet att se på derivering och integrering. De verkade under samma tid, men arbetade dock helt separat och lyckades, trots det, komma fram till nästan samma resultat vad gäller beräkningar med oändligt små (infinitesimala) storheter. Deras verk möjliggjorde för termen ”analys” att förknippas med bland annat derivata, integrering och serier. Innan förknippades analys med all typ av matematik [7].

Newton och Leibniz lyckades förklara, väldigt noggrant, och bevisa att det fanns en relation mellan integrering och derivering. Isaac Barrow försökte påvisa just detta, men misslyckades vilket nämnts på sida 22. Relationen mellan derivata och integraler är att de är varandras inverser vilket innebär att det finns en invers relation mellan lutningen av en kurva samt arean under denna kurva. Denna relation kallas för ”Analysens huvudsats” [2]. Fram tills mitten av 1600-talet var matematiker av den meningen att derivata och integrering var två helt skilda grenar inom matematiken, men detta kom att ändras efter Newtons och Leibnizs bevis [7].

Utöver att de bevisade analysens huvudsats framtog de även nya definitioner för derivering och integrering. De arbetade likaså med att uppfinna en standardbeteckning för sina beräkningar i derivering och integrering. De arbetade huvudsakligen inom samma områden, men kom dock fram till lite olika resultat. Newton och Leibniz definierade derivata och integraler på olika sätt och deras standardbeteckningar inom derivatan och integraler var även lite olika [1].

Eftersom Newton och Leibniz presenterade samma resultat i stora drag uppstod en dispyt mellan dem. Dispyten grundade sig i vem som var först med att presentera sina resultat vilket kommer behandlas mer nedan [10].

Isaac Newton [9] [34]:

Isaac Newton är en av tidernas mest framgångsrika vetenskapsmän på grund av sin inflytande i olika vetenskapliga grenar. Hans två största grenar var matematik och fysik, men han studerade även kemi, astronomi, alkemi och religion. Han föddes i England, i närheten av Grantham, i en bondefamilj och levde under åren 1642 – 1727 e.Kr.. När han var 19 år gammal påbörjade han sina studier vid Cambridge universitet år 1661. Han blev senare en professor där fram till år 1696. Innan Newton började studera vid Cambridge universitet samt under den tid han väl studerade var det Euklides verk *Elementa* som fick honom att begrunda sig i matematiken ännu mer.

Newton var mest produktiv under åren 1665-1666 under sin tid på Cambridge eftersom det pågick en stor pest vilket resulterade i att skolan stängdes ner. Väl när skolan var stängd åkte han tillbaka till sitt hem på landet och spenderade mycket av sin tid med att arbeta med matematik. Han kunde arbeta väldigt intensivt under vintern då det inte fanns mycket lantarbete som behövde göras.

Newton har många verk avseende fysik och de flesta skrevs ned i hans stora verk ”*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*”. I sitt verk presenterade Newton sina tre rörelselagar som har lagt en grund för den klassiska mekaniken. Dessa tre lagar handlar om

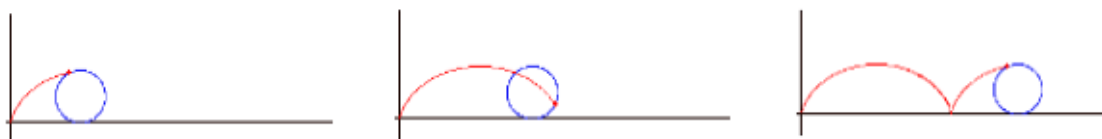
relationen mellan en kropp och krafterna som har verkan på kroppen i fråga. Enheten för krafter är kallade efter Newton [6].

Gottfried Wilhelm von Leibniz [9] [35]:

Gottfried Wilhelm von Leibniz var en tysk filosof, jurist och friherre som föddes år 1646 i staden Leipzig och dog 1716 i Hannover, Tyskland. På grund av sin framgång inom juridiken fick han i uppdrag av ärkebiskopen av Mainz att resa runt i Europa för att diskutera politik med andra ledare. Under sina resor träffade han vetenskapsmän inom olika grenar. Deras verk fick upp hans intresse för att fördjupa sig inom naturvetenskap. Leibniz fördjupade sig bland annat inom matematik, kemi, fysik, etymologi vilket är läran om ords språkhistoriska ursprung [36], arkeologi vilket är läran om människans förhistoria [37] samt geologi vilket är läran om uppkomst, sammansättning och förändring av berg och jordarter [38]. Leibniz är mest känd för sin filosofi, men vilket tidigare nämnts har hans verk inom matematiken fått stor betydelse.

Leibniz publicerade sina verk om derivator och integraler år 1684 och år 1686 i tidskriften ”*Acta Eruditorum*”. Hans verk inom analys har möjliggjort att lösa många problem inom den moderna analysen som till exempel Tautokron- och Brachistokron-problemet. Tautokron- och Brachistokron kurvan är en cykloid och den kurvan uppstår då en fix punkt på en cirkel rullar längs en rät linje [39].

Figur 18. Cykloid [F.7]

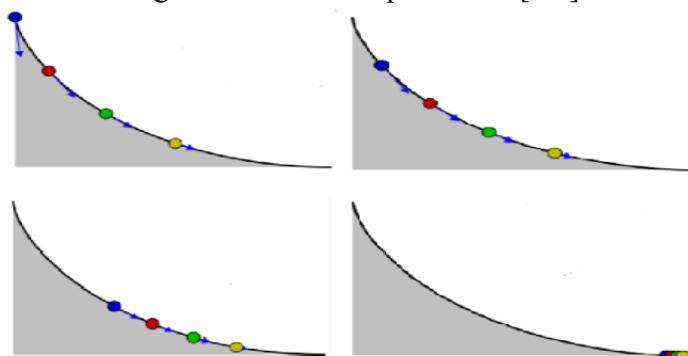


Figur 18: Med hjälp av Leibniz verk blev det lättare att lösa Tautokron- och Brachistokron-problemet.

Tautokron-problemet [40]:

Tautokron-problemet handlar om sökandet efter en viss kurva. Kurvans egenskap är att tiden det tar för en partikel att glida friktionsfritt till kurvans lägsta punkt är oberoende av startpunkten. Det spelar alltså ingen roll var på kurvan partikeln börjar utan det kommer alltid att ta en viss bestämd tid för partikeln att hamna på kurvans lägsta punkt, se figur 19 nedan. Kurvan som eftersöks är den så kallade tautokron-kurvan. Tautokron-kurvan är egentligen är en cykloid.

Figur 19. Tautokron-problemet [F.8]



Figur 19: Fyra lika partiklar med olika startpunkter glider friktionsfritt ned för en cykloid och träffar cykloidens lägsta punkt samtidigt.

Tiden T det tar från startpunkten till kurvans lägsta punkt är: $T = \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$ där r är radien för den cirkel som utgör en cykloid (se sida 32) och g är tyngkraftsaccelerationen, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ [22].

Bevis [41]:

Eftersom det är en cykloid vi jobbar med ska vi använda cykloidiska koordinaterna för x och y vilket [13] är:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot (\theta - \sin \theta) \\y &= -r \cdot (1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

där r är radien för den cirkel som utgör en cykloid och θ är vridningsvinkeln.

Derivatan av koordinaterna med avseende på vinkeln θ är:

$$\begin{aligned}x' &= r \cdot (1 - \cos \theta) \\y' &= -r \cdot \sin \theta\end{aligned}$$

Med det kan vi skriva:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \cdot |(1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta|$$

Om uttrycket ovan förenklas med hjälp av $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ [13] får vi:

$$x'^2 + y'^2 = 2r^2 \cdot (1 - \cos \theta)$$

Enligt [6] är den totala mekaniska energin E_{tot} bevarad. Det vill säga att $E_{tot \text{ före}} = E_{tot \text{ efter}}$ där $E_{tot} = E_k + E_p$. E_k är den kinetiska energin $E_k = \frac{mv^2}{2}$; där m är massan, v är hastigheten, och E_p är den potentiella energin $E_p = mgh$; där g är tyngdkraftsaccelerationen och h är höjden.

Detta leder till:

$$\begin{aligned}E_{tot \text{ före}} &= E_{tot \text{ efter}} \\E_{k \text{ före}} + E_{p \text{ före}} &= E_{k \text{ efter}} + E_{p \text{ efter}}\end{aligned}$$

I vårt fall är $E_{k \text{ före}} = 0 \text{ J}$ eftersom hastigheten v för partikeln är 0 m/s före starten samt att $E_{p \text{ efter}} = 0 \text{ J}$ eftersom höjden h för partikeln är 0 m efter den har glidit ner till cykloidens lägsta punkt. Detta ger oss uttrycket.

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Bryter vi ut hastigheten v från ekvationen ovan får vi: $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh}$ (se sida 6). dt kan skrivas som $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gh}}$ och ds är i sin tur: $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta$.

Vi studerar problemet då partikeln startar på en punkt utefter kurvan och glider ner till kurvans lägsta punkt, det vill säga då $h = y_0 - y$.

Använder vi allt vi har kommit fram till får vi:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gh}} = \frac{\sqrt{2r^2 \cdot (1 - \cos \theta)}}{\sqrt{2gh}} d\theta = \frac{\sqrt{2r^2 \cdot (1 - \cos \theta)}}{\sqrt{2gr \cdot (\cos \theta_0 - \cos \theta)}} d\theta$$

$$dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta$$

Den totala tiden det tar för en partikel att röra sig från en punkt på cykloiden till cykloidens lägsta punkt beräknas genom integralen:

$$T = \int_{\theta_0}^{\pi} dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta$$

Om uttrycket ovan förenklas med hjälp av $1 - \cos \theta = 2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$ samt $\cos \theta = 2 \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ [13] får vi:

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta$$

Om $u = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}}$ är $du = -\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \cdot \cos \frac{\theta_0}{2}}$. Då blir uttrycket ovan:

$$T = -2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -2 \sqrt{\frac{r}{g}} [\arcsin(u)]_1^0 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Vi ser att tiden t det tar för en partikel att glida friktionsfritt ner för kurvan till kurvans lägsta punkt är oberoende av startpunkten. Detta innebär att cykloiden har tautokron-egenskaper vilket skulle bevisas.

Brachistokron-problemet [40]:

Brachistokron-problemet liknar Tautokron-problemet, men syftet nu är dock att söka efter de så kallade Brachistokron-kurvan. Brachistokron-kurvan är den kurva där en partikel på minsta möjliga tid startar från en punkt A på kurvan och glider friktionsfritt till en annan punkt B på kurvan. Efter långa och komplicerade matematiska beräkningar visar det sig, precis som tautokron-problemet, att den sökta kurvan är en cykloid.

Figur 20. Brachistokron-problemet [F.9]



Figur 20: Den kurva där en partikel på minsta möjliga tid startar från en punkt A och glider friktionsfritt till punkt B är en cykloid.

3.2 Newtons och Leibnizs verk och dispyt

Analysens huvudsats:

Denna sats talar om att de två viktigaste grenarna i analysen, derivering och integrering, är varandras inverser. Detta betyder att en funktion som integrerats återgår till funktionens ursprung innan integreringen genom att derivera den integrerade funktionen. Konsekvensen av denna sats blir att integralen kan beräknas med hjälp av en primitiv funktion till den funktion som ska integreras.

Satsen formuleras som [3]:

Antag att en funktion f är kontinuerlig det vill säga utan avbrott i intervallet $a \leq x \leq b$. Detta innebär att funktionens värde genomgår små förändringar när variabelernas värde genomgår små förändringar [42]. Sätt

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{då } a \leq x \leq b$$

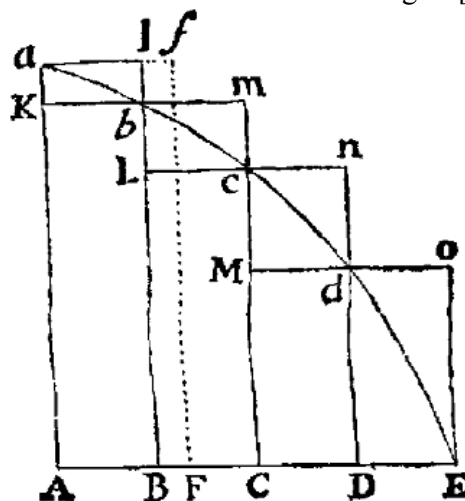
Den primitiva funktionen F är deriverbar och dess derivata är $F'(x) = f(x)$. I detta fall tillhör x intervallet $a < x < b$.

Newtons och Leibnizs olika definitioner av derivata och integraler [1] [9] [10]:

Newtons definitioner av derivata och integraler återfinns i de två första böckerna av hans verk "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*". I den första boken beskriver han att om kurvan till en kontinuerlig funktion i intervallet $[a, b]$ ritas ut kan rektanglar med lika långa baser, som täcker hela arean under kurvan (se figuren 21 nedan), ritas ut. Summan av arean för rektanglar med en höjd över kurvan kallas för översumman och summan av arean för rektanglar med en höjd under kurvan kallas för undersumman. Newton förklarar att summan av dessa

areor går mot ett och samma tal då antalet rektanglar går mot oändligheten. Talet är arean under kurvan. Newton definierar alltså integralen för en funktion som arean under funktionens kurva.

Figur 21. Newtons definition av integral [F.10]



Figur 21: Då antalet rektanglar går mot oändligheten kommer översumman och undersumman gå mot ett tal. Arealen under kurvan är integralen av funktionen.

I *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"* andra bok definierar Newton begreppet differential som förändringen, ökning eller minskning, i ett ögonblick. Newton kallar ögonblicket för "moment" och en funktion har under ett visst moment en viss hastighet, en förändringshastighet, vilket han kallar för "fluxioner". Fluxioner är det vi idag kallar för derivatan. Newton definierade alltså derivata som förändringshastigheten vid ett ögonblick.

Leibniz förklarar däremot derivator med hjälp av förståelsen av tangenter. Han har alltså en mer geometrisk tolkning av derivatan. Genom att bestämma lutningen för tangenten bestäms derivatan. Tangenten är den rätta linjen som förenar två punkter på en kurva som har ett oändligt litet avstånd från varandra.

Leibniz hade en metod som han använde för att bestämma en funktionskurva utifrån dess tangent. Samma metod använde han för att räkna ut arean under en funktionskurva. För Leibniz var det inte främmande att derivatan av areafunktionen (integralen) var den givna funktionen till kurvan. För Leibniz var integralen den funktion som han hade innan han deriverade för att fastställa funktionen till kurvan. Förhållandet mellan derivatan och integralen är den så kallade analysens huvudsats, se sida 35.

Newtons och Leibnizs olika beteckningar för derivata och integraler [1] [9] [10]:

Newtons notation till "fluxioner", vilket vi idag skulle kalla för derivata, används inte ofta. Det används dock när exempelvis mekanik studeras [43]. Det kan då se ut på följande sätt: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ och motsvarar i sin tur följande uttryck: $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, vilket är Leibniz notationer för derivator. Leibniz notationer är det som oftast används, men det är dock Newtons notationer som dominerar när mekanik studeras. Antalet prickar över funktionen x talar om hur många gånger funktionen har deriverats med avseende på tiden. Detta för att derivator för Newton var förändringshastigheten av funktionen. Två prickar, $\ddot{x}$, kan skrivas med Leibniz notationer som $\frac{d^2x}{dt^2}$ och innebär att x har deriverats två gånger med avseende på tiden t . Det samma gäller för tre prickar $\dddot{x} = \frac{d^3x}{dt^3}$ och så vidare.

Eftersom integraler används när areor summeras använde Leibniz ett "avlångt S" för sin notation av integraler. Integralen för en funktion $y(x)$ kan se ut på följande sätt: $\int y dx$ enligt Leibniz notationer. När vi idag arbetar med integraler är det enbart Leibniz notationer som används eftersom Newtons notationer för integrering inte var praktiska när hans verk skulle tryckas. Newtons notationer för integralen av en funktion var en ruta, i rutan skrev han funktionen som ska integreras. Han skrev exempelvis $\int \frac{a}{2x} dx$ som [44]:

a
2x

Dispyten mellan Newton och Leibniz [10] [17]:

Det som föranledde Leibniz och Newtons dispyt baserades på ryktet att Leibniz fått tag på Barrows och Newtons verk och därefter gjort justeringar vilka han i sin tur presenterade som sina egna. Det är riktigt att Leibniz hade sett några av Newtons verk när han besökte London år 1673 samt att han mottagit brev från Newton. Det visade sig att det inte var tillräckligt för att Leibniz kunde publicera sitt verk år 1684 varför han måste ha gjort den största delen själv.

Newton var den av dem som först färdigställde sitt verk och innan Leibniz hade börjat fördjupa sig inom matematik var Newton redan färdig. Trots detta var det Leibniz som publicerade sina verk innan Newton. Ovanstående var grunden till deras dispyt och de kunde inte enas om vem av dem som upptäckte resultaten först. Dispyten startade år 1700 och varade i flera år. Den fortsatte fram till 1720-talet det vill säga några år efter Leibniz död år 1716. Idag är vi dock överens om att Newton och Leibniz arbetade separat, men kom fram till liknande resultat vid ungefär samma tid [11].

Newton var inte alltid villig att publicera sina verk med anledning av att han varje gång var tvungen att försvara sin nya upptäckt under en lång period. Detta fick Newton att känna sig som en "slav till försvarandet". Vid år 1676 fick han nog och publicerade ingenting fram tills år 1704. Även fast han gjorde sina upptäckter före Leibniz kände han en motvilja att presentera dessa på grund av allt som hänt i hans förflutna. En del av Newtons verk publicerades inte förrän han avlidit.

Reflektioner:

Det har varit en såväl intressant som spännande resa genom tiden för att se hur en sådan viktig del av matematiken utvecklats från det antika Grekland fram till 1600-talet. Våldigt mycket har hänt och många matematiker har varit delaktiga i utvecklingen av analysen.

Analysen har utvecklats under flera generationer samt med många matematiker och därför är det inte riktigt att påstå att analysen framtagits av Newton och Leibniz trots att dessa två har format analysen vi idag känner till. Newton och Leibniz utvecklade vidare vad andra matematiker arbetat fram innan dem [7]. Analysen vi känner till idag har därför fått genomgå en lång process. Utvecklingen har skett med hjälp av många matematiker från olika delar av världen samt att dessa, på olika sätt, tillfört något till analysen som vi idag känner till. Det vi däremot kan konstatera är att Newton och Leibniz har lagt grunden för den moderna analysen vi idag använder oss av. Notationerna och definitionerna vi använder är från deras verk.

Det jag tycker har varit intressant är att derivator och integraler i början av analysens historia betraktades som två skilda grenar inom matematiken och att dessa, inom sin tid, sammanflätats till en matematisk sats. Det är mer än förståeligt att tro att dessa är skilda för när vi arbetar med derivator så behandlas bland annat förändringshastigheter och lutningar av tangenter och när vi arbetar med integraler så behandlas arean under kurvan. Det är svårt att se kopplingen mellan lutningen för en kurva och arean under den, men idag är det däremot svårt att nämna den ena utan att nämna den andra.

I dagens matematikundervisningar får gymnasieelever lära sig om derivering innan de får lära sig om integrering. Detta för att det blir lättare för elever att förstå integraler om de först lär sig derivering, men om vi ser till analysens historia ser vi att integrering behärskades först av dem två. Det kan ha varit på detta sätt eftersom integralkalkylen behandlar beräkningar av areor och volymer för geometriska figurer och kroppar. Det var just det som många tidiga matematiker arbetade med, exempel på detta var Eudoxos. En annan orsak till varför integralkalkylen behandlades först under analysens historia kan ha sin grund i att geometriska kroppar är lättare att arbeta med jämfört med kurvor och tangenter till kurvor. Det senare kan vara mer abstrakt att arbeta med.

Jag hoppas att denna rapport har varit givande och väckt något intresse för matematikens historia i synnerhet analysen, men även andra grenar inom matematik.

Referenser:

- [1] Bo Göran Johansson: *Matematikens historia*
- [2] http://www.mathdb.org/articles/calculus/e_calculus.htm (20/3-2014)
- [3] Arne Persson & Lars-Christer Böiers: *Analys i en variable* (tredje upplagan)
- [4] Dimitrios Maltas & Anne Prescott: *Calculus-based mathematics: An Australian endangered species?*
- [5] Greg Hill: *The Everything Guide to Calculus I: A Step-by-step Guide to the Basics of Calculus - in Plain English!*
- [6] Jearl Walker: *Principles of physics*
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_calculus (20/3-2014)
- [8] <http://www.storyofmathematics.com/medieval.html> (25/3-2014)
- [9] E. T. Bell: *The development of mathematics*
- [10] D. E. Smith: *History of mathematics*
- [11] Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics* (2nd ed.)
- [12] http://www.bbc.co.uk/history/historic_figures/archimedes.shtml (15/4-2014)
- [13] Lennart Råde & Bertil Westergren: *Mathematics Handbook*
- [14] Patricia Gnadet: *Archimedes' Determination of Circular Area*
- [15] David M. Burton: *The History of Mathematics - An Introduction*
- [16] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Al-Tusi_Sharaf.html (15/4-2014)
- [17] Editerad av John Daintith: *Biographical encyclopedia of scientists* – third edition
- [18] http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat (15/4-2014)
- [19] http://www.ne.se/geometrisk-f%C3%B6ljdi_h_word=geometrisk+serie (22/9 – 2014)
- [20] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/fermat.html> (22/9 – 2014)
- [21] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/brytningsindex> (15/11-2016)
- [22] Carl Nordling & Jonny Österman: *Physics Handbook*

- [23] http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Barrow/RouseBall/RB_Barrow.html (15/4-2014)
- [24] <http://mypages.iit.edu/~maslanka/Math122notes1.pdf> (1/7-2014)
- [25] <http://www.ne.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/rymdgeometri> (12/11-2014)
- [26] <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookXII/propXII7.html#cor> (19/11-2016)
- [27] <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookXII/propXII5.html> (19/11-2016)
- [28] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/polynom> (23/11-2016)
- [29] <http://quadrivium.info/MathInt/Notes/AlHazenSummation.pdf> (5/7-2014)
- [30] Victor J. Katz: *Ideas of Calculus in Islam and India*
- [31] <http://en.wikipedia.org/wiki/Alhazen> (15/4-2014)
- [32] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/oftalmologi> (18/11-2014)
- [33] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/kinematik> (5/1-2017)
- [34] Editerad av John Fauvel, Raymond Flood, Michael Shortland & Robin Wilson: *Let Newton be! A new perspective on his life and works*
- [35] http://sv.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz (25/4 – 2014)
- [36] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/etymologi> (26/2 – 2015)
- [37] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/arkeologi> (26/2 – 2015)
- [38] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/geologi> (26/2 – 2015)
- [39] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/cykloid> (7/4 - 2015)
- [40] Mijat Mijatović: *Examples of the tautochrone*
- [41] <http://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/t/t059.htm> (28/7 – 2015)
- [42] <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/kontinuerlig-funktion> (6/12-2016)
- [43] Nicholas Apazidis: *Mekanik, statik och partikeldynamik*
- [44] Florian Cajori: *A history of mathematical notations – two volumes bound as one*

Figurer:

- [F.1] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tangent_to_a_curve.svg (4/4 - 2014)
- [F.2] <http://olleh.se/start/GeoGebra/geo-integraler.htm> (2/7 - 2015)
- [F.3] <http://mathworld.wolfram.com/ArchimedesSpiral.html> (7/4 - 2014)
- [F.4] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/fermat.html> (22/9 – 2014)
- [F.5] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg (15/4 – 2014)
- [F.6] https://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle (21/7 – 2015)
- [F.7] <http://sv.wikipedia.org/wiki/Cykloid> (1/5 - 2014)
- [F.8] http://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve (3/7 - 2014)
- [F.9] http://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve (20/11 – 2014)
- [F.10] <http://acko.net/blog/to-infinity-and-beyond/> (11/12 - 2015)