



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Area och volymeräkningar före infinitesimalkalkylen

av

**Tomas Kilström**

2018 - No K5



# Area och volymeräkningar före infinitesimalkalkylen

Tomas Kilström

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Christian Gottlieb

2018



Jag vill tacka min handledare Christian Gottlieb för stort stöd och inspiration under arbetets gång. Jag vill även tacka Torbjörn Tambour som födde mitt intresse för matematikens historia och bidrog med värdefulla kommentarer.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Tidslinje</b>	
<b>2</b>	<b>Introduktion</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Geometriska metoder</b>	<b>3</b>
3.1	Parallelogram . . . . .	3
3.2	Hippokrates månskära . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Uttömningsmetoden</b>	<b>10</b>
4.1	Arean av en cirkel . . . . .	11
4.2	Två cirklers förhållande . . . . .	15
4.3	Volymen av en kon . . . . .	17
4.4	Cylinderns mantelarea . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Parabelns area</b>	<b>23</b>
5.1	Metoden . . . . .	23
5.2	Parabelns area . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Serier och summor</b>	<b>31</b>
6.1	Wallis . . . . .	31
6.2	Brouncker . . . . .	36
6.3	Mercator . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Cavalieris Princip</b>	<b>41</b>
7.1	Sfärens volym . . . . .	43
7.2	Servettring . . . . .	44
<b>8</b>	<b>Slutord</b>	<b>47</b>
<b>9</b>	<b>Appendix</b>	<b>48</b>
<b>10</b>	<b>Litteratur</b>	<b>53</b>
10.1	Grafik . . . . .	53

# 1 Tidslinje

Första spår av matematik  
30.000 f.v.t

Moskva-papyrusen  
1850 f.v.t

Rhind-papyrusen  
1650 f.v.t

Pythagoras  
ca. 585-500 f.v.t

Hippokrates  
ca. 460-380 f.v.t

Eudoxus  
ca. 408-355 f.v.t

Euklides  
ca. 323-285 f.v.t

Archimedes  
ca. 287-212 f.v.t

Bonaventura Cavalieri  
1598-1647 e.v.t

John Wallis  
1616-1703 e.v.t

William Brouncker  
1620 - 1684 e.v.t

Nicholas Mercator  
1620 - 1687 e.v.t

Isaac Newton  
1642 - 1727 e.v.t

Gottfried Leibniz  
1646 - 1716 e.v.t

## 2 Introduktion

*”Egypten är Nilens gåva”*

Det ska Herodotos, historiens fader, ha sagt. Man skulle också kunna säga att geometrin är Nilens gåva. [1]

Vi ska titta på hur man beräknat areor och volymer genom årtusenden fram till 1700-talet och integralkalkylen. Vi kommer stöta på några av de största matematikerna, de vars axlar Newton så berömt stod på.<sup>1</sup>

Det verkar som att vi människor alltid har varit intresserade av praktisk matematik. Att räkna boskap och sädeslager, räkna dagar till nästa skörd eller plantering, följa himlavalvet för religiösa seder. Vi har räknat matematik längre än vad vi har haft ett skriftspråk. [1,5]

När man dock pratar om matematisk teori så är ursprunget något modernare och preciserbart. I läroböckerna tycks nästan all matematik, framförallt geometri, börja i antiken. Vi lär oss i skolan om Pythagoras och Thales satser, den förstnämnda är nog en bra kandidat till det mest välkända matematiska sambandet i världen.

Vi vet idag att till exempel Pythagoras sats har betydligt äldre grunder än såväl Pythagoreerna som den grekiska världen i helhet men det var grekerna väl medvetna om också. Aristoteles skrev att: *”Den matematiska vetenskapen uppstod i området kring Egypten; därför att det där fanns en klass av präster som hade fritid”*; de arbetade inte i jordbruket. Det må vara sant; den matematiska teorin uppstod ungefär samtidigt som klasser med fritid uppstod; men med dagens mer kritiska, eller cyniska, syn på historien säger vi hellre att det uppstod för att lösa praktiska problem. [1]

Geometrin tros ha uppstått i Egypten. Där tog man fram instruktioner för beräkning av olika figurer: trianglar, rektanglar, cirklar, pyramider, rätblock, cylindrar med flera. Som med mycket av den väldigt tidiga historien så är det sannolikt att flera av dessa samband var kända av andra civilisationer runt om i världen. [1,5]

Så varför uppstod geometrin, varför räkna ut dessa problem?

Vi kan faktiskt låta de forna egyptierna själva illustrera detta. Vi börjar med ett problem från Rhind-papyrusen, ett av två dokument; det andra är Moskva-papyrusen;

---

<sup>1</sup>Citatet lyder: *”If I have seen further, it is by standing upon the shoulders of giants”* och kommer från en brevväxling mellan Isaac Newton och Robert Hooke. Om Newton i själva verket var så ödmjuk som citatet antyder låter vi vara osagt.



som det mesta av vår förståelse av egyptisk matematik kommer ifrån. [1]

Om vi tittar på problem 41: Bestäm volymen av ett cylindriskt spannmålmagasin vars diameter är 9 och höjd är 10 kubit”.<sup>2</sup> Det är ett klassiskt matematiskt problem. Vi kan enkelt se varför man skulle vilja veta hur mycket mat som finns för att föda människorna eller planera högtider.

Andra problem berör exempelvis att räkna ut arean av ett fält och därifrån får vi såväl ordet geometri, grekiska för geo-jord och metri- mäta, som kanske vår tidigaste systematiska matematik.

Den kanske främsta anledningen till varför vi tillskriver Egypten med upptäckten av geometrin, såväl som mycket annat, har ingenting med människorna eller kulturerna som levde där. Det är tyvärr så att det allra mesta materialet försvunnit genom historien, från alla kulturer. Egypten är dock speciellt gynnsamt för att bevara material och dokument i och med sin torra luft. Därför har vi osedvanligt mycket material därifrån som saknas från andra tidiga kulturer, framförallt med tidigare indiska och kinesiska civilisationer.[1]

Det finns dock en bra motivering till varför Egypten ändå är speciell, Nilen. Nilen svämmade över varje år, en förutsättning för att civilisationen skulle uppstå där.

Det ledde till att marken runt floden var exceptionellt bördig och bra för jordbruk. Det orsakade dock problem när man skulle taxera bönderna. Varje år skulle bönderna ge en viss del av skörden i skatt men eftersom Nilen svämmade över olika mycket på olika platser så varierade böndernas mark från år till år och därmed hur mycket de skulle beskattas. Därför behövde man metoder för att enkelt kunna räkna ut hur mycket varje bonde skulle betala in varje år. [1,5]

Vi vet inte vad de allra tidigaste matematiska skrifterna kan ha innehållit. Moskva-papyrusen, den äldre av de två berömda matematiska skrifterna, innehåller en del problem av den här typen men även problem av helt annan natur; många av dem skulle inte se främmande ut i en lärobok idag.

---

<sup>2</sup>Kubit är ungefär detsamma som aln, ett gammalt mått som ungefär motsvarar en halvmeter och är avståndet från armbågen till toppen av pekfingret.

## 3 Geometriska metoder

### 3.1 Parallelogram

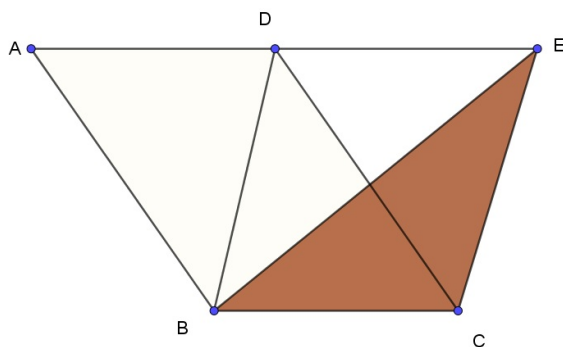
Elementa är ett av matematikens absolut främsta verk. Som författare står Euklides som levde i Alexandria runt 300 år f.v.t. men det är i själva verket en sammanställning av matematiken genom den antika perioden. Det är den äldsta bevarade kompletta matematiska text som finns bevarad från den grekiska världen.

Elementa består av 13 böcker som berör olika områden såsom primtal, vinklar och konstruktioner. Exakt vad som är Euklides egna bevis och vad som är nedskrivet från tidigare matematiker är i de flesta fall svårt att avgöra. [1,5]

Från Elementa kan vi finna ett antal geometriska metoder för areaberäkning. Eller, mer precist, hur vi skapar en enklare figur från en mer komplicerad. Via ett antal propositioner kan vi visa hur vi kan skapa en parallelogram från en mer komplicerad figur. [3]

*Proposition 37:* Utan något bevis introducerar vi proposition 37 från Elementas första bok. ”Två trianglar med samma bas och mellan samma parallella linjer är lika stora”.

*Proposition 41:* ”En parallelogram är dubbelt så stort som en triangel då de delar bas och ligger mellan samma parallella linjer”.

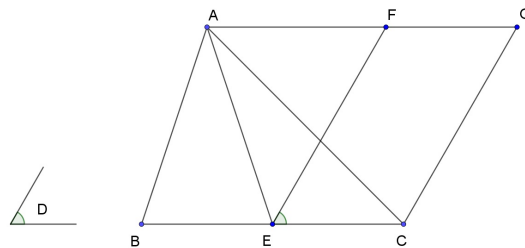


Vi har triangeln  $BCE$  och parallelogrammen  $ABCD$ . I parallelogrammen drar vi en diagonal. Vi får då två lika trianglar  $ABD$  samt  $BCD$ .

Vi noterar att de är lika då parallelogrammen ger  $AB = CD, AD = BC$ . De två triangelarna har alltså, tillsammans med diagonalen, tre lika stora sidor varför de har samma area. Vi kan alltså skriva parallelogrammen som  $2BCD$  och då  $BCD = BCE$  enligt prop. 37 så får vi att  $ABCD = 2BCE$  osv.

*Proposition 42:* visar hur vi kan skapa en parallelogram med samma area som en given triangel,  $\triangle ABC$ . Euklides visar oss också hur man får parallelogrammen att ha en given vinkel,  $D$ . För att enkelt beräkna dess area så sätts denna gärna rät så vi får en rektangel.

Vi sätter  $E$  som mittpunkt på sträckan  $BC$  och drar sträckan  $AE$ .  $EF$  dras med given vinkel,  $D$ , och möts av  $AG$  som dras parallell med  $BC$ . Vi avslutar med att rita  $CG$  parallell med  $EF$ .

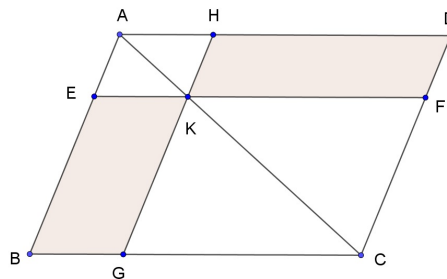


Vi har  $BE = EC$  vilket medför  $\triangle ABE = \triangle AEC$  enligt prop 37 vilket ger  $\triangle ABC = 2\triangle AEC$ . Prop 41 ger  $2\triangle AEC = CEFG$  så vi ser att  $\triangle ABC = CEFG$  osv.

*Proposition 45* bygger vidare på metoden i prop 42 för att visa hur vi kan skapa en parallelogram lika med en godtycklig polygon. För detta behöver vi dock de mellanliggande propositionerna 43 och 44.

*Proposition 43:* säger att ”Arean av två parallelogrammer, med ett hörn i motsatta ändar av en större parallelogram, och det motsatta hörnet i en gemensam punkt på diagonalen mellan den större parallelogrammens övriga två hörn, är lika”.

Vi illustrerar:



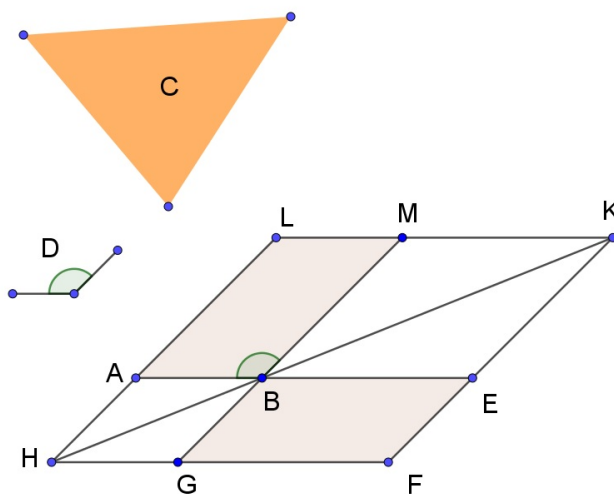
Vi söker alltså visa att parallelogrammerna  $HDFK$  och  $EKGB$ , har samma area. Resultatet fås enkelt då vi noterar att parallelogrammen  $ABCD$  delas upp i de två kongruenta trianglarna  $ABC$  samt  $ADC$ . På samma sätt delas parallelogrammerna  $AHKE$  samt  $KFCG$  upp i kongruenta trianglar,  $AEK$  och  $AHK$  samt  $KGC$  och  $KFC$ .

$\triangle ABC$  består av parallelogrammen  $EKGB$ ,  $\triangle KGC$  och  $\triangle AEK$ .

$\triangle ADC$  består av parallelogrammen  $HDFK$ ,  $\triangle KFC$  och  $\triangle AHK$ .

Då  $\triangle ABC = \triangle ADC$ ,  $\triangle KGC = \triangle KFC$  och  $\triangle AEK = \triangle AHK$  så följer att: parallelogrammen  $EKGB =$  parallelogrammen  $HDFK$

*Proposition 44:* visar hur vi kan fästa en parallelogram, i en given vinkel, till en sträcka.



Vi vill fästa på sträcka  $AB$  en parallelogram,  $ABML$ . Parallelogrammen ska ha samma area som en triangel,  $C$  och ha en given vinkel,  $D$ .

Uppgiften är således att skapa en parallelogram lika med en triangel i en given vinkel, precis som i proposition 42, men med det extra villkoret att en av sidorna i parallelogrammen redan är given,  $AB$ .

Vi skapar parallelogrammen  $BEFG$  lika med triangeln  $C$  på samma sätt som i proposition 42 med vinkeln  $EBG$  lika som den givna vinkeln  $D$ . Vi placerar parallel-

logrammen så att  $BE$  ligger med en rak vinkel med sträckan  $AB$ .

Vi drar  $AH$  parallellt med  $BG$  och låter den möta  $HG$ , som dras som förlängning på  $GF$ , i punkten  $H$ . Sedan drar vi sträckan  $HB$  och förlänger den tills den möter den förlängda sträckan  $EK$ , som förlängs från  $EF$ , i punkten  $K$ . Därefter drar vi sträckan  $MK$  parallellt med  $BE$  tills den möter den förlängda sträckan  $BM$ , som förlängs från  $GB$ , i punkten  $M$ . Och slutligen så förlänger vi  $MK$  och  $AH$  tills dessa möts i punkten  $L$ .

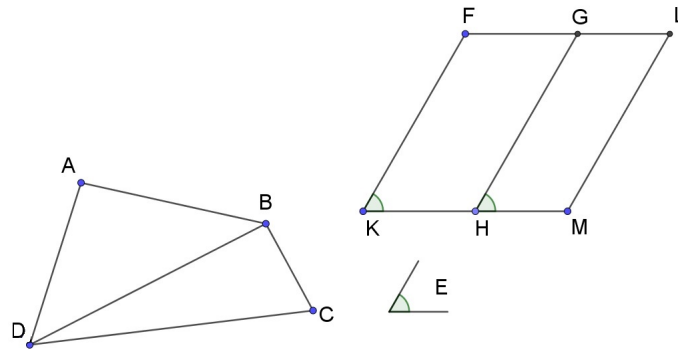
De två parallelogrammerna  $LMBA$  och  $BEFG$  är lika enligt proposition 43.

Vinkeln  $D$  finner vi som vinkel  $MBA$  ty den är alternatvinkel till  $EBG$  som konstruerades lika med vinkeln  $D$ .

Således har vi konstruerat en parallelogram med en given sida, en given vinkel och med samma area som en given triangel, v.s.v.

*Proposition 45: "Att, givet ett godtyckligt polynom, skapa en parallelogram med lika area och med en given vinkel".*

Vi har en godtycklig figur bestående av räta sträckor, i vårt fall figuren  $ABCD$ .



Vi kan då dela upp denna figur i trianglar såsom figuren illustrerar. För en annan figur kan metoden visas helt analogt.

Vi inleder med att konstruera parallelogrammerna  $KHGF = \triangle ABD$ , samt  $HMLG = \triangle BCD$ . Vi skapar först parallelogrammen  $KHGF$  och fäster därefter parallelogrammen  $HMLG$  på sträckan  $GH$ , allt enligt proposition 42 och 44.

Vi skall alltså visa att dessa två parallelogram kan slås ihop och bilda parallelogrammen  $KFLM = ABCD$  med en given vinkel.

Från vår konstruktion så får vi att vinklarna  $HKF$  och  $MHG$  är lika då de båda är

konstruerade efter den givna vinkeln  $E$ . Vi lägger vinkeln  $KHG$  till båda de andra vinklarna. Summorna kommer då vara lika stora och kommer motsvara en rak vinkel då  $FKH + KHG$  bildar en rak vinkel. Därmed kommer  $KHG$  och  $MHG$  också bilda en rak vinkel. En rak sträcka  $GH$  kommer alltså dela i punkten  $H$  en rak sträcka  $KM$ . Därför ligger  $KH$  och  $HM$  på samma raka sträcka.

Då  $HG$  är transversal till  $KM$  och  $FG$  så kommer vinklarna  $MHG$  och  $FGH$  vara lika då de är alternatvinklar. Vi adderar vinkeln  $LGH$  till båda och får en rak vinkel som summa då  $MHG$  och  $LGH$  bildar en rak vinkel. Därmed bildar även  $FGH$  och  $LGH$  en rak vinkel och vi får på samma sätt att  $FL$  är en rak sträcka och  $FG$  och  $GL$  ligger på samma raka sträcka. Då  $KF$  och  $LM$  är parallella och lika långa och  $KM$  och  $FL$  slutar i dess ändar så kommer  $KM$  och  $FL$  vara lika långa och parallella. Därför är  $KFLM$  en parallelogram v.s.v.

För areaberäkning sätts vinkeln  $E$  lämpligen som rät för att skapa en rektangel.

### 3.2 Hippokrates månskära

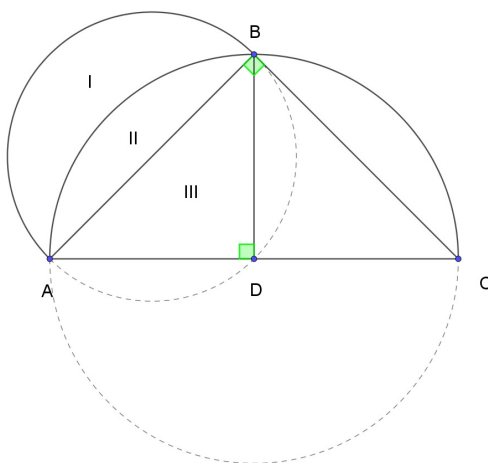
Ett av de stora problemen inom den antika geometrin, ett av de så kallade tre konstruktionsproblemen, var cirkelns kvadratur. Hur skapar vi en kvadrat med samma area som en given cirkel, med endast passare och linjal?

I moderna termer kan vi alltså översätta problemet som att lösa:  $\pi \cdot r^2 = s^2$ , där  $s$  är sidan i vår kvadrat. Detta ger oss att  $s = +\sqrt{\pi} \cdot r$ . Varför detta problem är omöjligt att lösa skulle dröja ända fram tills 1882 innan det bevisades då Lindemann fann att  $\pi$  är ett så kallat transcendent tal.

Hippokrates gjorde dock en spännande upptäckt i sitt sökande efter cirkelns kvadratur. Han fann en annan figur, som begränsas endast av cirkelbågar, vars area kunde bestämmas. Något som vi skall visa nedan. [1,5]

Hippokrates av Chios, inte att misstas för den kanske ännu mer berömda och samtida Hippokrates av Kos som brukar kallas ”*Läkekonstens fader*”, var en ledande matematiker under slutet av 400-talet f.v.t. Hippokrates levde ett högst intressant liv, han var en handelsman tills han blev bestulen på sin förmögenhet. Därefter kom han att bli en av de första att försörja sig helt på undervisning av matematik. Aristoteles sade om honom att ”*Det är väl känt att personer korskade i ett område inte alls behöver vara det i alla andra ämnen, därav Hippokrates, en kompetent geometriker, tycks vara i alla andra frågor korskad och berövad förnuft.*” [1]

Så om Aristoteles i alla fall godkänner hans matematikkunskaper så skall vi också se över vad han kom fram till[1]:



Vi ser i figuren längst upp till vänster en månskära, området  $I$ . Vad Hippokrates fann var att detta område, som är begränsat endast av cirkelbågar som vi tidigare nämnt, är lika stort som triangeln  $III$ . Det är viktigt att notera att det samband Hippokrates fann är beroende av en speciell typ av månskära. Den måste vara sådan att den begränsas av två cirkelbågar och att om  $AB$  och  $AC$  är diametrar i respektive cirkel och, givet att mittpunkten på den större cirkeln ges av  $D$ ,  $ADB$  samt  $ABC$  är rätvinkliga. Således gäller det inte för alla månskärar men då vår figur uppfyller dessa krav så studerar vi den närmre.

Då två cirklar är till varandra som kvadraten på dess diameter, något vi skall visa i ett senare kapitel, så kan vi ställa upp förhållandet:

$$(AB)^2 : (AC)^2 = \text{Cirkel } AB : \text{Cirkel } AC$$

Då  $AB$  är hypotenusan på triangeln  $III$  så gäller att:

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2 = 2(AD)^2$$

Vidare gäller att  $AC = 2AD$ , så vi kan ställa upp förhållandet:

$$2(AD)^2 : (2AD)^2 = \text{Cirkel } AB : \text{Cirkel } AC$$

$$2(AD)^2 : 4(AD)^2 = \text{Cirkel } AB : \text{Cirkel } AC$$

$$1 : 2 = \text{Cirkel } AB : \text{Cirkel } AC$$

Vi ser alltså att cirkeln  $AC$  är dubbelt så stor som cirkeln  $AB$ . Detta innebär att kvartscirkeln ( $II+III$ ) är lika stor som halvcirkeln ( $I+II$ ). Då kvartscirkeln ( $II+III$ ) och halvcirkeln ( $I+II$ ) båda innehåller området  $II$  så gäller alltså, ( $I = III$ ), vilket är månskäran och triangeln.

Vi ser alltså att månskäran, som endast begränsas av cirkelsegment, är lika stor som en given triangel. Att det kunde ses som ett lovande resultat mot cirkelns kvadratur är fullt förståeligt men dessvärre så skulle det problemet aldrig lösas.



## 4 Uttömningsmetoden

En av de främsta metoderna för beräkning av areor och volymer inom den tidiga matematiken var med Eudoxus uttömningsmetod som, så mycket annat, finns bevarad via Euklides Elementa.

Eudoxus förtjänar kanske äran som den mest framstående grekiska matematikern före Arkimedes. Han lämnade sitt hem som 23-åring för att studera och kom sedermera att grunda en skola som till och med konkurrerade med Platons Akademi, där Eudoxus själv studerat en tid. Eudoxus främsta bedrifter är delvis hans s.k. teori om proportioner som berör reella tal. Teorin är så pass komplett att den inte skulle ersättas på över två millennier. Den andra stora bedriften är uttömningsmetoden. [1]

I Elementa bok 10 så introduceras metoden och i bok 12 används den flertalet gånger för bestämning av såväl areor som volymer. [3]

Sats X.1 (bok 10, sats 1) säger:

*” Om två storheter är givna och från den större subtraheras en storhet större än hälften och från differensen subtraheras en storhet större än hälften och detta upprepas så erhålls en återstod mindre än den minsta av de två storheterna.”*

Om vi tänker utifrån moderna metoder kan vi utgå ifrån storheterna  $A$  och  $B$  där  $A > B$ . Om vi ska avlägsna mer än halva  $A$  så kan vi avläsa differensen som  $A - k \cdot A$  där  $k > 0.5$ . Detta kan vi skriva om som  $(1 - k)A$ ,  $k > 0.5$ .

Om vi sedan upprepar processen  $n$  gånger får vi  $(\prod_{i=1}^n (1 - k_i))A$  där  $k_i > 0.5$  är andelen som figuren reduceras med i steg  $i$ . Gränsvärdet när  $n$  går mot det oändliga blir då 0 och, eftersom våra storheter är positiva, så kommer vi få en återstod som är mindre än  $B$ .

Det är inte nödvändigtvis helt enkelt att se hur denna metod kan användas för beräkningar av volymer och areor så vi illustrerar med några exempel.

## 4.1 Arean av en cirkel

Från Arkimedes har vi en text som berör beräkning av cirklar. Texten har inte bevarats i sin originalform utan har, som så många andra historiska dokument, översatts och tolkats vidare. Troligen så härrör texten från en längre text *Om cirkelns omkrets* men endast en mindre del av det har bevarats.

Den första satsen är den vi är intresserade av. Sats 2 och 3 berör numeriska beräkningar av cirkelns omkrets i förhållande till dess diameter, det vill säga beräkningar av talet  $\pi$ . [2,6]

Sats 1:

*”Arean av en cirkel är lika med arean av en rätvinklig triangel där sidorna är radien respektive omkretsen av cirkeln.”*

I modern notation får vi alltså att cirkelns area  $A_c = \pi r^2$  är lika med triangelns area  $A_t = \frac{r \cdot O}{2}$  där  $O$  är cirkelns omkrets.  $O = 2r\pi$  ger oss  $A_t = \frac{r \cdot 2r\pi}{2} = \pi r^2$ . Vi ser därmed enkelt att satsen stämmer. Vi illustrerar dock hur samma resultat kan fås via uttömningsprincipen.

Vi börjar med att definiera några variabler. Cirkelns area kallar vi  $A_c$ , triangelns area  $A_t$  och vi definierar även  $I_n$  och  $O_n$  som den inskrivna respektive omskrivna regelbundna polygonen till cirkeln med  $n$  sidor. Vi söker visa att  $A_c = A_t$  och vi kommer att göra det genom att motbevisa motsatsen, det vill säga ett indirekt bevis.

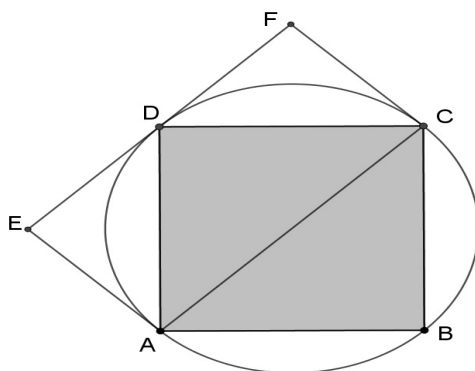
Vi säger därför att  $A_c > A_t$ :

Utifrån uttömningsprincipen så vill vi visa att vi kommer att kunna reducera  $A_c - I_n$  så att  $A_c - I_n < A_c - A_t$  vilket ger oss i):  $I_n > A_t$ .

Vi utgår från de två storheterna,  $(A_c - I_n)$  samt  $(A_c - A_t)$ . Då  $I_n$  varierar beroende på hur vi skapar polygonen så är det uppenbart så att  $(A_c - I_n)$  är den större storheten för något  $n$ . Då vi i varje steg, varje ökning av  $n$ , kommer mer än halvera den kvarvarande arean, något som återstår att bevisa, så kommer den återstående arean,  $(A_c - I_n)$ , till slut att vara mindre än  $(A_c - A_t)$  enligt uttömningsmetoden.

Vi måste konstatera att vi kan skapa en sådan polygon som uppfyller att vi i varje steg reducerar arean mellan cirkel och polygon med minst hälften.

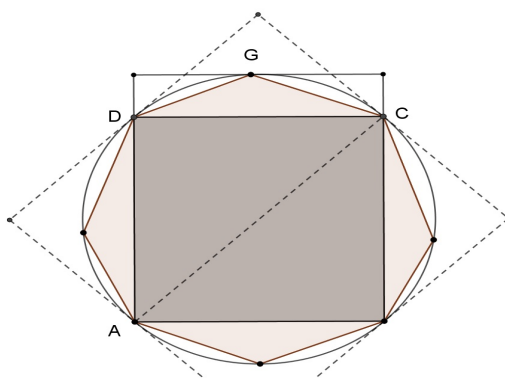
Vi börjar med att införa en liksidig polygon med 4 sidor, mer känt som en kvadrat.



Att denna har en area mer än halva cirkeln kanske ses som givet men vi bevisar det ändå. Vi inleder med att sätta ut kvadratens diagonal,  $AB$ . Vi sätter därefter ut rektangeln  $ACFE$  där  $EF$  ligger i linje med punkten  $D$ . Vi får då en rektangel  $ACFE$  större än halvcirkeln  $ADC$ . Eftersom triangeln  $ACD$  är halva rektangeln  $ACFE$  följer att triangeln  $ACD$  måste vara större än halva halvcirkeln  $ADC$ .

Med samma metod på den andra halvcirkeln så får vi resultatet att kvadraten är större än halva cirkeln.

Vi kan nu använda precis samma metod för att skapa en regelbunden oktagon som också kommer reducera med mer än halva arean.

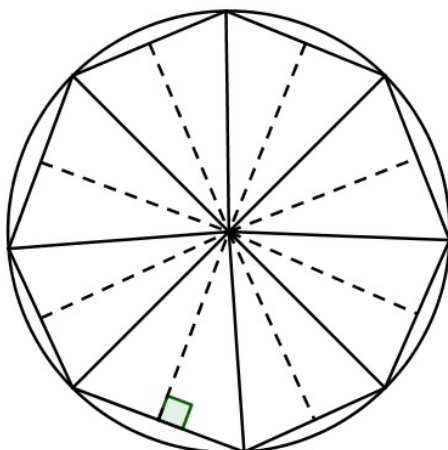


Vi drar då parallella tangenter till kvadraten på cirkeln. Den punkten som tangerar cirkeln kommer då bilda ett hörn,  $G$ , i en ny triangel som har en av kvadratens sidor som bas.

Med precis samma resonemang får vi att denna också kommer vara större än halva det område som återstår efter att vi tagit bort kvadraten.

Denna process kan sedan upprepas för att skapa en hexadecagon (16-hörning) som kan användas för att skapa en 32-hörning och så vidare som alla reducerar den kvarvarande arean med mer än hälften.

Därmed så uppfyller vår reducering kraven på att vi i varje steg tar bort minst halva arean. Därmed kan vi enligt uttömningsprincipen ställa upp:  $A_c - I_n < A_c - A_t$  vilket som ovan ger oss att i)  $I_n > A_t$ .

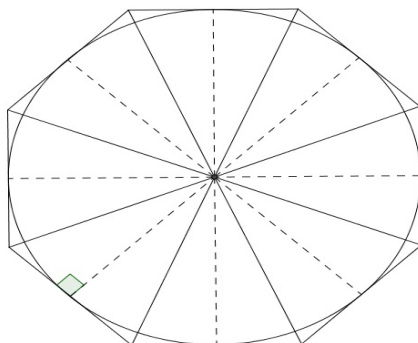


Om vi studerar den inskrivna polygonen så ser vi att den består av liksidiga trianglar. Varje triangel har en bas som är en korda på cirkeln och en höjd som är sträckan från mittpunkten på en av kordorna till cirkelns mittpunkt.

Varje triangel kan vi alltså beräkna traditionellt med dess bas och höjd. Summerar vi dessa för en  $n$ -hörning så får vi  $I_n = \frac{n \cdot bh}{2}$ . Om vi jämför detta med  $A_t = \frac{O \cdot r}{2}$  så ser vi att  $h < r$  och att  $n \cdot b < O$ . Detta medför att  $I_n < A_t$  vilket strider mot vårt tidigare antagande, i):  $I_n > A_t$ .

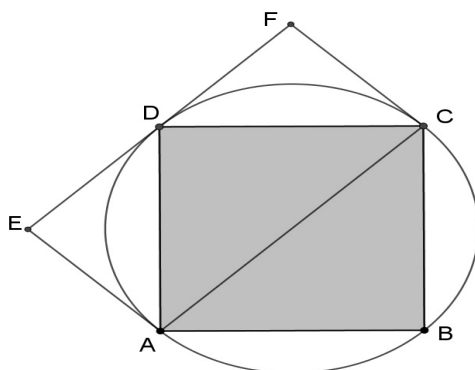
Vi ser alltså att påståendet  $A_c > A_t$  är omöjligt.

Vi antar då istället att det motsatta är sant, :  $A_c < A_t$ :



Vi vill då ställa upp från uttömningsprincipen att  $O_n - A_c < A_t - A_c$  vilket ger oss ii)  $O_n < A_t$ .

För att kunna göra denna uppställning så måste vi först konstatera att vi i varje steg reducerar figuren med minst hälften. Vi kan använda precis samma bild som förut:



Vi söker nu istället visa att cirkeln kommer reducera den omskrivna polygonen med minst hälften i varje steg. Vi ser att den inskrivna triangeln är halva rektangeln och att cirkelsegmentet är större än triangeln. Därför kommer cirkelsegmentet, eller halv-cirkeln i figuren, att reducera den omskrivna polygonen med mer än hälften i varje steg.

På precis samma sätt som förut så kan vi nu ställa upp och jämför  $A_t = \frac{r \cdot O}{2}$  samt  $O_n = \frac{n \cdot bh}{2}$ . Vi ser nu att  $h = r$  medan  $n \cdot b > O$  varför  $O_n > A_t$  vilket motsäger ii):

$O_n < A_t$ . Vi ser alltså att  $A_c < A_t$  är omöjligt.

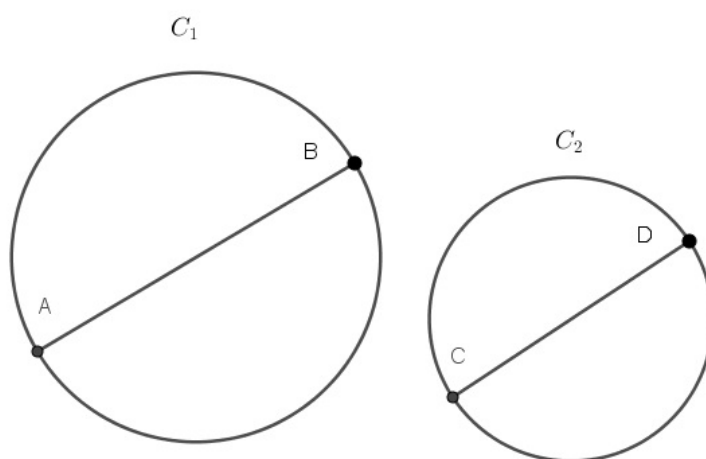
Kombinerat med vårt tidigare resultat att  $A_c > A_t$  är omöjligt så är den enda slutsatsen att  $A_c = A_t$  vilket var precis det vi ville nå fram till.

I beviset för satsen så använder vi omskrivningen och inskrivningen av cirkeln och visar att dessa uppfyller kravet för uttömningsprincipen. Detta resultat kommer vi återanvända i senare satser.

## 4.2 Två cirklers förhållande

Vi tittar nu på det första exemplet av uttömningsprincipen som tas upp i elementa. Proposition 1 och 2 från bok 12. [3]

Proposition 2 säger att arean av två cirklar har förhållande som deras diametrar i kvadrat, det vill säga:  $C_1 : C_2 = (AB)^2 : (CD)^2$



För att bevisa detta behöver vi dock proposition 1 som säger att: ”*Likformiga inskrivna polygoner är till varandra som kvadraterna på deras diametrar.*”

I moderna termer så handlar beviset alltså i princip om att visa att areaskalan är kvadraten av längdskalan. Vi lämnar beviset av det till läsaren.

Proposition 2 påstår alltså: ”*Cirklar är till varandra som kvadraten på deras diamet-*

*rar.*”

Vi visar detta genom ett indirekt bevis.

Om  $C_1 : C_2 \neq (AB)^2 : (CD)^2$  så måste  $C_1 : X = (AB)^2 : (CD)^2$  för något  $X$ .

Vi börjar vårt bevis med anta att  $X < C_2$ :

Vi ställer då utifrån uttömningsprincipen upp  $C_2 - P_2 < C_2 - X$  där  $P_2$  är någon polygon som vi använder för att reducera.

Vi kan använda uttömningsprincipen då vi vet från tidigare hur vi kan konstruera en polygon som reducerar arean av en cirkel med mer än hälften i varje reduktion.

$C_2 - P_2 < C_2 - X$  medför att i)  $P_2 > X$ .

Vi inskriver nu en polygon likformig med  $P_2$  i  $C_1$  som vi kallar  $P_1$ .

Från proposition 1 gäller:  $P_1 : P_2 = (AB)^2 : (CD)^2$  vilket kombinerat med  $C_1 : X = (AB)^2 : (CD)^2$  ger oss:

$$P_1 : P_2 = C_1 : X.$$

Då  $P_1$  är inskriven i  $C_1$  så följer att  $P_1 < C_1$  men då måste  $P_2 < X$ . Detta motsäger i) varför  $X < C_2$  inte är möjligt.

Vi undersöker då  $X > C_2$ :

Vi ställer upp  $X : C_1 = (CD)^2 : (AB)^2$  som förut, fast inverterat.

Då  $X > C_2$  så får vi ett förhållande:  $X : C_1 = C_2 : Y$  där  $Y$  är en storhet mindre än  $C_1$ .

Om vi kombinerar detta med ovanstående så får vi:

$(CD)^2 : (AB)^2 = C_2 : Y$  där  $Y < C_1$  vilket vi redan visat ej är möjligt. Vi slog ju tidigare fast att det inte var möjligt att  $X < C_2$  i förhållandet  $C_1 : X = (AB)^2 : (CD)^2$ . Således kan  $X$  varken vara större eller mindre än  $C_2$  och måste därför vara precis lika med  $C_2$  vilket var vårt sökta resultat.

Vi noterar här att i det andra fallet,  $X > C_2$  så använder sig Euklides inte av uttömningsmetoden. Han utnyttjar resultatet i det första fallet och refererar till det i det andra fallet.

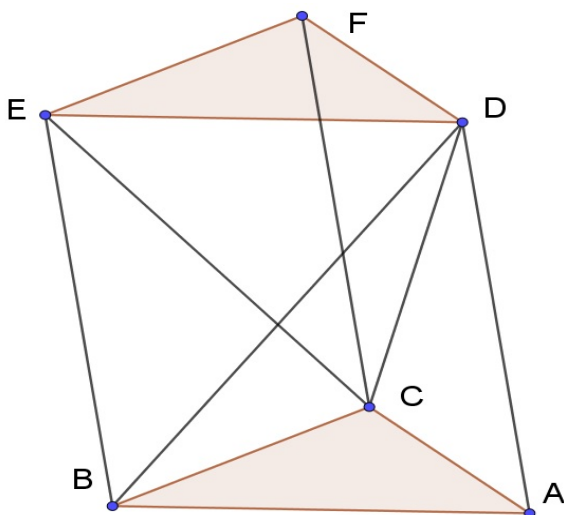
### 4.3 Volymen av en kon

Att volymen av en kon är en tredjedel av motsvarande cylinder bör vara ett känt samband. Ur *Elementa* så finner vi ett stiligt bevis som baseras på uttömningsprincipen på ett väldigt liknande sätt som beviset av sambandet mellan cirkelns area och dess diameter. [3] Innan vi kan studera beviset behöver vi dock ett annat samband för konens tvilling, pyramiden. Proposition 7 ur bok 10 säger att: ”*Volymen av en pyramid är en tredjedel av volymen av dess motsvarande figur, prisman.*” Propositionen behandlar endast fallet när basen är triangulär men vi kan enkelt utöka dess omfång till att ha en godtycklig polygon som bas.

Men innan vi kan tackla proposition 7 måste vi diskutera proposition 5.

Proposition 5 påstår ”*pyramider med triangulära baser och lika höjd är till varandra som deras baser*”. Det kan låta som en självklarhet men visar sig faktiskt vara svårare att bevisa, vi överlåter det till den intresserade läsaren. Vad som dock är viktigt att notera är att det baseras på uttömningsprincipen. Att det inte går att bevisa proposition 5, och i förlängningen flera andra propositioner som bygger på dess resultat, utan en metod som uttömningsprincipen är ett fascinerande problem i sig.<sup>3</sup>

Vi tittar igen på proposition 7: Om vi studerar ett prisma som har en triangulär bas:



---

<sup>3</sup>Det faktum att det saknas ett sådant bevis är kopplat till vad som kallas Hilberts tredje problem, ett av de 23 problem som matematikern David Hilbert presenterade 1900.[1]



Då  $ABED$  är en parallelogram följer att trianglarna  $ABD$  och  $EBD$  är lika. Då dessa är lika följer att pyramiderna  $ABDC$  och  $EBDC$  är lika enligt proposition 5. På precis samma sätt får vi från parallelogrammen  $EBCF$  att trianglarna  $EBC$  och  $ECF$  är lika. Då de är lika så följer att pyramiderna  $BCED$  och  $ECFD$  är lika. Då pyramiderna  $EBDC$  och  $BCED$  är samma figur så har vi alltså att  $ABCD = BCED = ECFD$ .

Dessa tre pyramider fyller ut hela prismet och är alla lika. Vi har således visat att ett givet prisma med triangulär bas kan delas upp i tre lika pyramider. Därifrån får vi enkelt att en av dessa pyramider motsvarar en tredjedel av prismet.

Vidare kan vi mer allmänt säga att detta samband gäller även för andra polygoner som prismats bas. Då varje sådan polygon kan delas in i trianglar som alla uppfyller sambandet så följer att hela figuren uppfyller att volymen av pyramiden är en tredjedel av volymen av prismet för ett godtyckligt prisma.

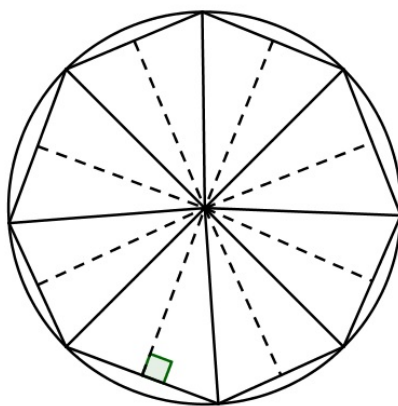
Tillbaka till konen, i proposition 10 söker vi visa att konen är en tredjedel av dess motsvarande cylinder.

Vi omformulerar detta som att cylindern är tredubbla dess motsvarande kon.

För om cylindern inte är det tredubbla av motsvarande kon så måste den antingen vara större eller mindre.

Vi undersöker först om cylindern kan vara större än tredubbla konen:

Vi inskriver i cirkeln, som utgör cylinderns bas, en polygon och låter denna bilda ett prisma med samma höjd som cylindern.



Vi återanvänder vår tidigare figur som vi redan visade uppfyllde villkoren för uttömningsprincipen, att vi i varje steg kan reducera med minst halva arean.

Om vi nu istället studerar vår cylinder och prismet så kommer de bete sig på samma sätt, bara multiplicerat med deras höjd. Vi kommer vid upprepad reduktion få ett segment kvar av cylindern som är mindre än skillnaden mellan cylindern och konen multiplicerad med 3.

Prismet som vi skapat kan vi dela i tre lika delar så vi har alltså att prismet är tredubbla pyramiden med samma bas som prismet.

Således får vi att det kvarvarande segmentet då vi reducerar cylindern med tredubbla pyramiden är mindre än skillnaden mellan cylindern och tredubbla konen.

Detta ger att tredubbla pyramiden är större än tredubbla konen och alltså att pyramiden är större än konen. Men den är också mindre än konen då den är inskriven i konen. Därför kan inte cylindern vara större än tredubbla konen.

Vi sammanfattar med lite notation vad vi gjort:

Cylinders volym =  $C$ , Inskrivna prismas volym =  $I$ , Pyramidens volym =  $P$ , Konens volym =  $K$ .

$$C - I < C - 3K$$

vilket medför att:

$$C - 3P < C - 3K$$

vilket ger oss:

$$P > K$$

som är uppenbart omöjligt då pyramiden är inskriven i konen.

Vi undersöker då istället om cylindern kan vara mindre än tredubbla konen:

Detta är detsamma som att konen är större än tredjedelen av cylindern.

Vi utgår från precis samma figur med en inskriven polygon i en cirkel. Cirkeln låter vi utgöra konens bas. Vi kan i den inskriva en pyramid med basen som utgörs av den inskrivna polygonen.

Vi kan då reducera konen sådant att skillnaden mellan konen och pyramiden är mindre än skillnaden mellan konen och tredjedelen av cylindern.

Detta medför att pyramiden är större än tredjedelen av cylindern. Men då pyramiden är tredjedelen av prismet så följer att prismet är större än cylindern men detta är

inte möjligt då det också är inskrivet. Således följer att cylindern inte är mindre än tredubbla konen.

Med notation får vi igen:

Cylinderns volym =  $C$ , Pyramidens volym =  $P_y$ , Konens volym =  $K$ ,

Prismats volym =  $P_r$ .

$$K - P_y < K - \frac{1}{3}C$$

vilket ger oss att:

$$P_y > \frac{1}{3}C$$

från vilket följer att:

$$\frac{1}{3}P_r > \frac{1}{3}C$$

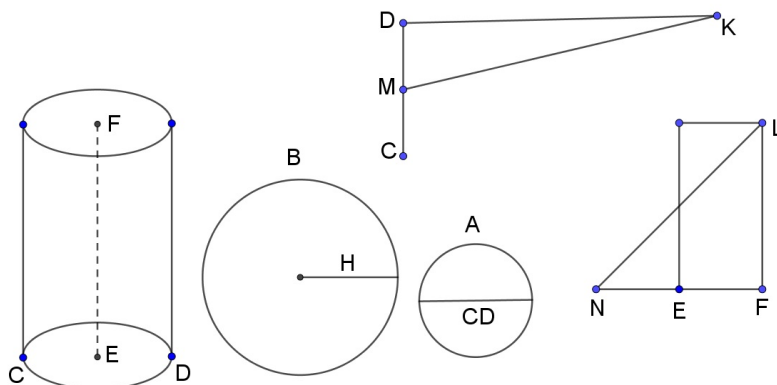
Det medför att:

$$P_r > C$$

vilket är uppenbart omöjligt då prisma är inskrivet i cylindern.

Då cylindern varken är mindre eller större än tredubbla konen så får vi att den måste vara precis tredubbla konen. Därav följer att konen är en tredjedel av cylindern v.s.v.

## 4.4 Cylinderns mantelarea



Arkimedes visar i proposition 13 av sitt verk *Om sfären och cylindern I* hur vi kan finna mantelarean av en cylinder. För att visa detta behöver vi även proposition 5. [2,6] Proposition 5 säger att vi, givet en cirkel och två olika storheter, kan skapa en omskriven och inskriven polygon till cirkeln sådana att vi får förhållandet:

Omskriven : Inskreven < Större storheten : Mindre Storheten.

Vi kallar cylinderns mantelarea, utan dess baser, för  $S$ . Vi söker visa att arean av cirkel  $B = S$ .

Cirkel  $B$  är skapad sådan att dess radie,  $H$ , är medelproportionalen av  $CD$  och  $EF$ . Det vill säga  $H = \sqrt{(CD \cdot EF)}$ .

Cirkel  $A$  utgör cylinderns bas, dess diameter ges av  $CD$  och höjden är  $EF$ .  $EF$  och  $CD$  används även i de andra två figurerna.

Arkimedes använder sig återigen av ett motsägelsebevis. Vi undersöker de två olikheterna,  $B < S$  samt  $B > S$  och visar att dessa ej är möjliga.

Vi börjar med att pröva om  $B < S$ :

Enligt proposition 5 kan vi skapa en omskriven och en inskriven polygon till cirkel  $B$ ,  $O_B$  respektive  $I_B$ , sådana att:

$O_B : I_B < S : B$ .

Vi inför polygonen  $O_A$ , omskrivna polygonen till cirkel  $A$ , sådan att den är likformig med  $O_B$ . Vi skapar sedan ett prisma med  $O_A$  som bas och med samma höjd som cylindern. Då vi kommer behöva denna senare så inför vi också  $P_O$  som mantelarean av prisma utan dess baser.

$KD$  och  $FL$  är lika med omkretsen av  $O_A$ , vi kallar denna  $O(O_A)$ , och sätta med rät

vinkel mot sina baser,  $DC$  respektive  $NF$ .  $M$  sätts som mittpunkt på  $CD$  och  $NE$  är satt lika med  $EF$ .

Vi kan nu se att  $\Delta KDM = O_A$ , här syftar vi givetvis på arean av  $O_A$ .

Båda uttrycken kan skrivas som:  $\frac{O(O_A) \cdot \frac{CD}{2}}{2}$

Vi ser också att arean av rektangeln  $EL = P_O$ . Detta följer uppenbart då  $EL = EF \cdot FL$  där  $EF$  är cylinderns, och därmed även prismats, höjd och  $FL$  är omkretsen av  $O_A$ .

Vi kommer nu återanvända proposition 1 från bok 12 av elementa, samma hjälpsats som vi använde i avsnitt 4.2.

$$\Delta KDM : O_B = (MD)^2 : H^2,$$

vilket följer av att  $\Delta KDM = O_A$  och två polygoner är till varandra som dess diameter, eller radie, i kvadrat, proposition 1. Radien av cirkel  $A$  är halva  $CD$  vilket är  $MD$ .

$(MD)^2 : H^2 = (MD)^2 : (CD \cdot EF)$ , vilket fås då  $H$  är medelproportionalen av  $CD$  och  $EF$ , det vill säga,  $H = \sqrt{CD \cdot EF}$ .

$$(MD)^2 : (CD \cdot EF) = MD : NF, \text{ vilket fås genom att } \frac{CD \cdot EF}{MD} = \frac{2MD \cdot EF}{MD} = 2EF = NF.$$

$MD : NF = \Delta KDM : \Delta LFN$ , vilket fås då dessa har samma höjd och har  $MD$  respektive  $NF$  som baser.

Om vi nu tar den första och sista likheten tillsammans så får vi:

$$\Delta KDM : O_B = \Delta KDM : \Delta LFN \text{ vilket ger oss att } O_B = \Delta LFN.$$

$\Delta LFN = EL = P_O$ , där den första likheten fås av proposition 41 i bok 1 av elementa som vi bevisade i avsnitt 3.1. Vi landar därmed i att  $O_B = P_O$ .

Vi återgår till vår första olikhet,  $O_B : I_B < S : B$ . Vi kan nu införa att:

$$P_O : I_B < S : B \text{ eller alternativt: } P_O : S < I_B : B.$$

Detta är uppenbart omöjligt då mantelarean av prismet,  $P_O$ , är större än mantelarean av cylindern,  $S$ , samtidigt som den inskrivna polygonen  $I_B$  är mindre än  $B$ .

Vi provar då istället om  $B > S$ :

Vi har en olikhet på samma sätt igen  $O_B : I_B < B : S$  med ombytta platser av  $B$  och  $S$ , ty de har bytt storleksförhållande.

$$\Delta KDM = O_A \text{ ger oss att } \Delta KDM > I_A.$$

Vi har i övrigt samma likheter som i fallet ovan, så:  $\Delta LFN = EL =$  Mantelarean av

prismat. Vi använder oss av prismat över  $I_A$  och låter kalla dess mantelarea  $P_I$ .

$$I_A : I_B = (MD)^2 : H^2 = \Delta KDM : \Delta LFN.$$

Då  $\Delta KDM > I_A$  så måste  $\Delta LFN > I_B$ . Då  $\Delta LFN = P_I$  så följer att:

$$P_I > I_B.$$

Men detta är omöjligt då  $O_B : I_B < B : S$  ger att  $O_B : I_B < O_B : S$  då  $O_B > B$ .

Detta ger att  $I_B > S$  vilket ger att  $I_B > P_I$ , då prismat av den inskrivna polygonen har mindre mantelarea än cylindern.

Vi ser således att arean av cirkel  $B$  varken är större eller mindre än mantelarean av cylindern. Därav måste de vara lika.

## 5 Parabelns area

### 5.1 Metoden

Om vi studerar många av våra bevis så bygger de på att vi redan vet resultatet. Vi ställer upp ett förhållande och bevisar att just detta förhållande stämmer, men hur kom någon på att pröva med just det förhållandet?

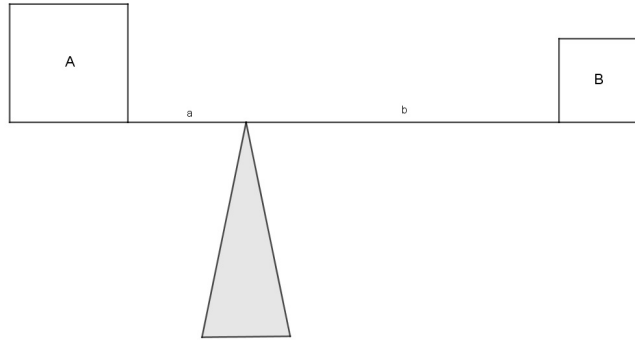
Det var en obesvarad fråga ända fram till 1906 när Johan Ludvig Heiberg inspekterade en palimpsest i Konstantinopel, dagens Istanbul, som han hade uppmärksammat på. Dokumentet var en bönebok, nästan helt skriven på pergament, som var skriven under 1300- eller 1400-talet. Men dolt under texten så fanns rester av en kopia av Arkimedes verk författat på 900-talet. [2,6]

Bland de olika verken som texten innehöll så fanns *Metoden*. Vad som är så speciellt med *Metoden* är att den avslöjar processen bakom bevisen. Att en sådan process existerade var i det närmsta oundvikligt men spåren hade suddats bort genom historien. Kvar stod bara dessa pelare, dessa perfekta geometriska bevis, utan något av det fundament som låg bakom dess upptäckt. I och med *Metoden* så har vi fått en blick av dessa fundament.

Arkimedes är extremt noga med att påpeka att detta inte är ett bevis, utan endast början av en undersökning, en fingervisning om vad som skall bevisas.

Så, hur går metoden till?

Arkimedes metod bygger på jämviktsförhållanden. Vi ser på en figur i jämvikt: [2,6]



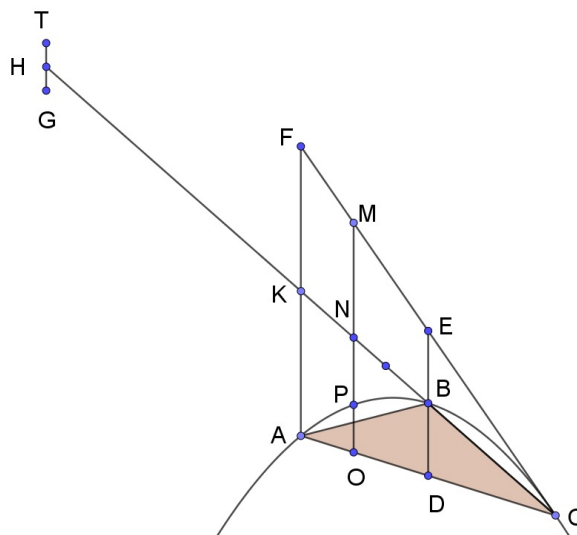
Om vi från fysiken ser på jämvikt så får vi likheten:  $A \cdot a = B \cdot b$  där vi låter  $A$  och  $B$  vara två vikter med avstånd  $a$  respektive  $b$  från deras jämviktspunkt.

Arkimedes ställer upp detsamma på ett litet annat sätt då det vore otänkbart att multiplicera två olika enheter, massa och sträcka.

Om vi utgår från samma figur så ser vi istället förhållandet som  $A : B = b : a$ .

Vi ser på hur Arkimedes använder metoden för att finna ett samband, arean under en parabel.

Vi ställer upp en figur som nedan:



Vi undersöker arean under parabeln  $ABC$ :

Vi sätter  $D$  som mittpunkt på sträckan  $AC$  och sätter ut  $B$  sådan att punktens tangent är parallell med  $AC$ .

Linjen  $CF$  tangerar parabeln i punkten  $C$ . Vi sätter ut de parallella linjerna  $DE$ ,  $OM$  och  $AF$ , där  $OM$  är en linje dragen genom någon punkt  $P$  på parabeln, sådana att de är parallella med parabelns symmetriaxel.

Arkimedes ger inget bevis utan påstår att  $DB = BE$ . Vi förpassar ett modernt bevis för den intresserade till appendix som också förklarar varför linjerna måste vara dragna parallella med symmetriaxeln.

Från det följer att  $ON = NM$  och  $AK = KF$ .

Vidare sätter vi ut  $H$  sådant att  $KH = CK$ .

Slutligen har vi  $TG$  som är placerad med  $H$  som mittpunkt, är parallell med, och har samma längd som,  $OP$ .

Så, vad beskriver denna figur?

Vi utgår ifrån det icke-triviala förhållandet  $MO : TG = HK : KN^4$ . Sträckorna  $MO$  och  $TG$  kan här ses som olika vikter som balancerar kring jämviktspunkten  $K$ . Då är punkterna  $H$  och  $N$  deras respektive tyngdpunkter.

Om vi tänker att parabeln består av en massa parallella linjer av samma typ som  $OP$  och vi upprepar processen så kommer vi få en mängd linjer med sin tyngdpunkt i  $H$  som sammanlagt har lika massa som parabelsegmentet.

På den andra sidan står triangeln  $ACF$ . Tyngdpunkten på triangeln  $ACF$  är noterad som  $W$  i figuren där  $KW = \frac{1}{3}KC$ .

Vi skriver om det som  $3KW = CK = HK$  vilket ger oss att  $HK = 3KW$ .

Med Arkimedes metod så kan vi alltså ställa upp jämviktsförhållandet:

$\Delta ACF$ : Parabeln  $ABC = HK : KW = 3:1$ .

Vi har dock förhållandet  $\Delta ACF = 4\Delta ABC$  och då vi slår ihop dessa samband så får vi: Arean av parabelsegmentet  $ABC = \frac{4}{3}\Delta ABC$

Förhållandet  $\Delta ACF = 4\Delta ABC$  ges också utan någon motivering.

Vi kan dock enkelt se detta samband då de har samma bas,  $AC$ , och  $\Delta ABC$  har halva

---

<sup>4</sup>I själva verket så finner vi sambandskedjan  $MO : OP = CA : OA = CK : KN = HK : KN$  och sambandet kommer då  $OP = TG$ . Bevis för dessa samband finns i texten *Parabelns kvadratur* som proposition 4 och 5.



höjden av  $ED$  som i sin tur är halva  $AF$  då  $D$  är mittpunkt på  $AC$ . Således delar  $\triangle ABC$  och  $\triangle ACF$  bas medan höjderna förhåller sig som 1:4. Då är det uppenbart att  $\triangle ACF = 4\triangle ABC$ .

Det är dock återigen viktigt att påpeka, som Arkimedes utan tvekan skulle ha gjort, att detta inte är något bevis.

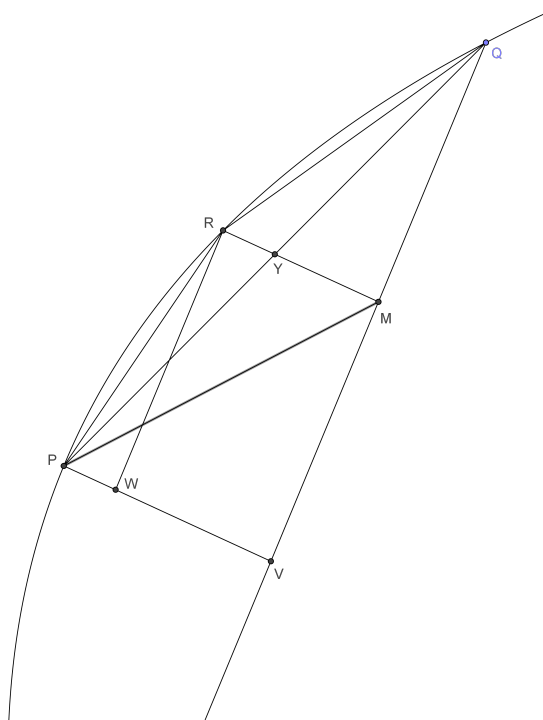
Exakt hur dessa linjer bygger upp parabeln är inte specificerat och utan en teori om infinitesimalkalkyl går det inte att något vidare motivera.

Det som Arkimedes metod fungerar för är just istället att hitta de samband som vi sedan bevisar med exempelvis motsägelsebevis genom uttömningsmetoden.

## 5.2 Parabelns area

Så, låt oss då bevisa sambandet! Arean under parabeln  $ABC = \frac{4}{3}\triangle ABC$  [2,6]

Vi inleder med att skissa upp problemet.



Vi skissar här upp parabeln mellan punkterna  $Q$  och  $q$ , ej visad i figur. I figuren ligger

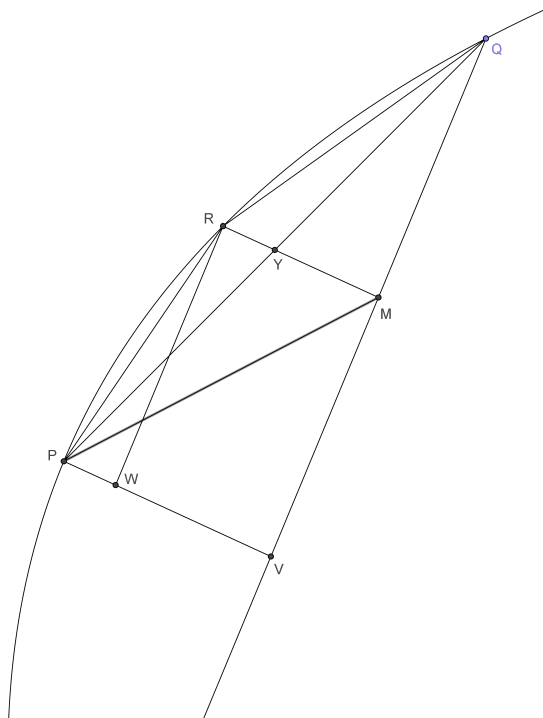
$P$  på den tangent som är parallell med sträckan  $Qq$ .

Därtill lägger vi punkten  $R$  som är tangeringspunkt till tangenten som är parallell med sträckan  $PQ$ .

Vi kommer här visa att  $\Delta PQR = \frac{1}{4}\Delta PQV$  och analogt kan visas motsvarande för den andra sidan varför vi kan dra slutsatsen att de tillagda trianglarna motsvarar  $\frac{1}{4}$  av den tidigare triangeln och varje nytt steg beter sig på precis samma sätt som det första. Vi har alltså en situation där vi kan ställa upp en summa av typen  $T_0 + T_1 + T_2 \dots = T_0 + \frac{1}{4}T_0 + \frac{1}{4^2}T_0 \dots$  där  $T_i$  är stegens tillagda trianglar.

Först återstår dock att visa att  $\Delta PQR = \frac{1}{4}\Delta PQV$ :

Arkimedes visar detta genom proposition 19 och 21 i sitt verk *Kvadraturen av parabeln*.



Vi börjar med att notera att punkten  $V$  är mittpunkt av sträckan  $qQ$ . Därtill inför vi de nya sträckorna  $RW$  samt  $RM$  med tillhörande punkter. Vi har därmed skapat parallelogrammen  $RMVW$ . Vi sätter också ut sträckorna  $PM$  samt punkten  $Y$ .

Vi tillämnar nu en sats som finns väl känd för Arkimedes. I appendix ges ett alge-

braiskt bevis, Arkimedes hade givetvis ett geometriskt bevis i åtanke och hänvisar till "Kägelsnitt" av Euklides och Aristaeus, ett verk som sedermera kom att överskuggas av Apollonius egna verk "Kägelsnitt".

Satsen ger oss förhållandet:

$$PV : PW = (QV)^2 : (MV)^2 = (QV)^2 : (RW)^2$$

där den sistnämnda likheten ges från parallelogrammen.

Då  $M$  är mittpunkt på  $QV$  så gäller att  $QV = 2(MV) = 2(RW)$ .

Vi får därför:

$$PV : PW = (2(RW))^2 : (RW)^2 = 4(RW)^2 : (RW)^2$$

Från detta får vi sambandet:  $PV = 4(PW)$ .

Detta ger oss längden av  $WV = 3(PW) = RM$ .

Då  $QV = 2(MV)$  så är  $PV = 2(YM)$ .

Detta ger oss  $YM = 2(PW)$  och då  $RM = 3(PW)$  så fås resterande,  $RY = PW$ .

Därför gäller att  $YM = 2(RY)$ .

Därmed är vi klara då vi enkelt kan se att  $\Delta PQR = \frac{1}{2}\Delta PQM$ , ty de delar  $PQ$  och  $\Delta PQM$  har halva höjden av  $\Delta PQR$ , och då  $\Delta PQM = \frac{1}{2}\Delta PQV$ , ty de delar  $PQ$  och  $\Delta PQM$  har halva basen av  $\Delta PQV$ , så ges sammantaget:

$$\Delta PQR = \frac{1}{4}\Delta PQV, \text{ vsv.}$$

Beviset av sambandet följer sedan av proposition 22 till och med 24 där vi i den sista propositionen använder oss utav uttömningsmetoden.

*Proposition 22:*

$T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots <$  Arean av parabelsegmentet  $PQq$ .

$T_i$  är de tillagda trianglarna steg i.  $T_0$  är således den första triangeln,  $T_1$  är de två som följer på det etc. Satsen följer enkelt genom att ställa upp våra trianglar.

$\Delta PQq = T_0, \Delta PQR + \Delta Pqr = T_1$  etc.

Då  $T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots$  är en inskriven polygon så den kommer den ha mindre area än arean  $PQq$ .

*Proposition 23:*

$$T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n + \frac{1}{3}T_n = \frac{4}{3}T_0$$

Vi ställer upp  $t_1, t_2, t_3$  etc. sådana att  $t_1 = \frac{1}{3}T_1, t_2 = \frac{1}{3}T_2$  etc.

Då vi vet att  $T_1 = \frac{1}{4}T_0, T_2 = \frac{1}{4}T_1$  etc. så får vi att:

$$t_1 + T_1 = \frac{1}{3}T_1 + T_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}T_0 + \frac{1}{4}T_0 = \frac{3+1}{12}T_0 = \frac{1}{3}T_0$$

$$t_2 + T_2 = \frac{1}{3}T_2 + T_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_1 = \frac{3+1}{12}T_1 = \frac{1}{3}T_1 \text{ etc.}$$

Vi adderar  $\sum_{i=1}^n T_i$  och  $\sum_{i=1}^n t_i$  och får då en summa av typen:

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n + t_1 + t_2 + \dots + t_n = \frac{1}{3}(T_0 + T_1 + \dots + T_n)$$

Vi vet att  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n)$ .

Om vi subtraherar dessa två rader får vi att  $T_1 + T_2 + \dots + T_n + t_n = \frac{1}{3}T_0$ .

Vi får alltså att:

$$T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n + t_n = T_0 + \frac{1}{3}T_0 = \frac{4}{3}T_0 \text{ v.s.v}$$

Vi ska nu med uttömningsprincipen visa att arean av området är precis  $\frac{4}{3}$  arean av triangeln.

Innan vi börjar så bör vi konstatera att vår inskrivna polygon faktiskt reducerar arean med minst hälften i varje steg. Det visar sig dock vara enkelt att göra. Arkimedes gör det i proposition 20 och det är nästan samma bevis som vår inskrivna polygon i en cirkel som vi tittade på i avsnitt 4.1. Den enda skillnaden vi måste göra är att i stället för att rita in en rektangel som vi gör i 4.1 så ritar vi istället in en parallelogram. Då triangeln är halva parallelogrammen och parallelogrammen är större än parabeln så följer att triangeln är större än halva parabeln.

*Proposition 24:*

Låt  $K = \frac{4}{3}\Delta PQq$  och  $Z$  benämna området.

Vi bevisar att arean måste vara precis som nämnt genom ett indirekt bevis.

Vi börjar med att pröva om  $Z > K$ :

Då kan vi enligt uttömningsprincipen reducera så att  $Z - P_n < Z - K$  där  $P_n$  är en polygon.

Detta leder till att  $P_n > K$ . Polygonen vi skapar består av de trianglar som vi skapat.

Vi har alltså  $P_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$ .

Men om vi sätter in att  $P_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n > K$  så motsäger det proposition 22.

Alltså kan  $Z > K$  inte vara sant.

Vi prövar nu istället om  $Z < K$ :

Om vi inksriver trianglar upprepade gånger så kommer vi till slut få en area,  $T_n$ , sådan att i):  $T_n < K - Z$ .

Vi observerar att Arkimedes här använder just  $T_n$ , det vill säga arean av de tillagda trianglarna i steg  $n$ .

Med hjälp av uttömningsprincipen kan vi reducera så att  $K - P_n < K - Z$ .

Proposition 23 ger oss  $K = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n + \frac{1}{3}T_n$ .

Om vi reducerar  $K$  med en polygon bestående av trianglar så får vi:

$$K - P_n = (T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n + \frac{1}{3}T_n) - (T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n) = \frac{1}{3}T_n$$

Vi ser alltså att  $K - P_n < T_n$ . Då områdets area är större än en inskriven polygon,  $Z > P_n$ , så medför det att  $K - Z < T_n$  vilket strider mot i).

Således kan  $K$  varken vara större eller mindre än  $Z$  utan måste vara precis lika med  $Z$ . Vi har alltså bevisat att  $\frac{4}{3}\Delta PQq$  är precis lika med arean under parabeln.

## 6 Serier och summor

Djosers trappstegspyramid [9]



### 6.1 Wallis

Vi ska titta på hur vi med uttömningsmetoden kan få fram den en känd regel vid integrering.

Vi börjar med en upptäckt av en engelsk matematiker vid namn John Wallis. Han undersökte vad som hände när man studerade kvoten mellan en summa av alla naturliga tal, inklusive 0, i kvadrat, upp till något tal  $n$ ; och summan av ett motsvarande antal termer, alla bestående av  $n$  i kvadrat. Wallis studerade alltså en uppställning av typen: [1,4]

$$\frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2 + n^2 + n^2 + n^2}$$

För att förstå hur Wallis kom att tänka på det här, och hur det kan tänkas användas kan vi tänkas studera en figur.

Vår figur är en trappstegspyramid; vi kan tänka oss att Imhotep fick göra ett nytt försök att bygga en pyramid och valde en helt kvadratisk bas med sidlängd  $n$  meter. För varje steg vi tar uppåt så minskar sidans längd med 1 meter. Vi fortsätter så hela vägen upp tills dess att vi inte har någon sida kvar att minska. Vi frågar oss nu, vilken volym har vår pyramid?

Jo volymen av pyramiden är summan av volymen för varje steg. För pyramiden får vi således:

$$V = h \cdot (n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2)$$

där  $h$  är höjden av varje steg.

Om vi jämför vår pyramid med ett torn med kvadratisk bas, sida  $n$ , så bestämmer vi volymen av tornet, ett rätblock, på samma sätt som pyramiden. Vi ser på segment med samma höjd som pyramidstegen.

Om vi ställer upp tornets volym får vi  $V = ah \cdot n^2$  där  $a$  är antalet steg och  $h$  är höjden av varje steg. Om vi sätter  $a = n + 1$  så får vi ett torn med samma höjd som vår pyramid där det sista steget i pyramiden har sida 0, det är alltså bara en punkt. Om vi tänker att vi har en tillräckligt stor bas så kommer pyramiden att te sig vara helt slät, jämförbar med Cheopspyramiden.

Om vi jämför dessa två volymer:

$$\frac{\text{pyramid}}{\text{torn}} = \frac{h \cdot (n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2)}{(n + 1)h \cdot n^2}$$

så ser vi att om vi eliminerar  $h$  från täljare och nämnare så kan vi skriva om kvoten som:

$$\frac{\text{pyramid}}{\text{torn}} = \frac{n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2 + n^2 + n^2 + n^2}$$

Vi har alltså med utgångspunkt i ett verkligt scenario skapat just en sådan situation som Wallis studerade.

Wallis inledde med att undersöka kvoten för några värden,  $n$ :

$$n = 1 : \frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 : \frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{5}{12}$$

$$n = 3 : \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$$n = 4 : \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

Härifrån så kom Wallis på att man kunde skriva om kvoterna till:

$$n = 1 : \frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

$$n = 2 : \frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right)$$

$$n = 3 : \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{6}{18} + \frac{1}{18} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right)$$

$$n = 4 : \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\right)$$

Varje kvot tycks kunna skrivas som  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$ .

I sin text *Arithmetica infinitorum* så presenterar Wallis sin metod, baserad på induktion, som säger att ett väletablerat mönster kan antas forstätta in perpetuum. Han påstod också, något som väldigt mycket liknar uttömningsprincipen, att en storhet som kan göras mindre än något utsatt tal kan ses som noll.

Om vi låter  $n$  gå mot oändligheten i vår kvot ovan så får vi  $\frac{1}{3}$ , då resttermen,  $\frac{1}{6n}$ , enligt Wallis kan sättas som noll.

Om vi utgår från vårt exempel ovan ger det alltså:

$$\frac{\text{pyramid}}{\text{torn}} = \frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = \frac{1}{3}$$

då  $n$  växer in perpetuum. Detta resultat bör inte vara speciellt förvånande då förhållandet  $\frac{\text{pyramid}}{\text{prisma}}$  är känt sedan tidigare som just  $\frac{1}{3}$ .



Vi kan också med den mer moderna metoden av gränsvärden beräkna resultatet:

$$\frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{(n+1)n^2} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6n} \rightarrow \frac{1}{3}$$

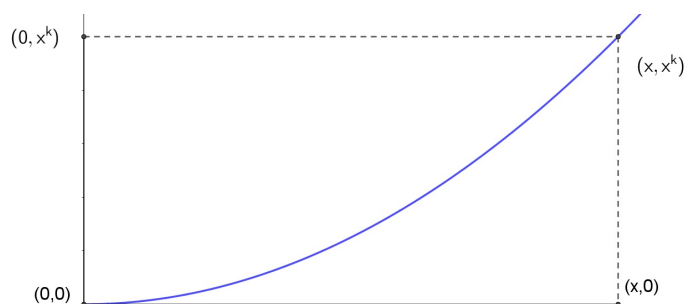
då  $n$  går mot oändligheten.

Wallis drog slutsatsen att  $\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \dots + n^k} \rightarrow \frac{1}{k+1}$ , då  $n$  går mot oändligheten för samtliga  $k$ .

Rent analogt är det möjligt att visa för vissa  $k$ . Wallis påstod dock att detta gällde för alla  $k$  med undantaget  $k = -1$ .

Något formellt bevis för detta ger Wallis oss inte utan det baseras på metoden som framlagts i *Arithmetica infinitorum*. Burton [1] sammanfattar det ganska bra då han beskriver metoden som tveksam och obekvä. Texten var dock vida cirkulerad i England och kom att influera Newtons mer rigorösa utforskning av infinitesimalkalkylen.

Wallis undersökte vidare den allmänna grafen  $y = x^k$ :



Vi kan med lätthet räkna ut arean av rektangeln som spänns upp från origo  $(0, 0)$  till punkten  $(x, x^k)$  till  $x \cdot x^k = x^{k+1}$ .

Nu tillämpar vi det sambandet som Wallis fann. Om vi tänker oss att vi delar in området i delområden på samma sätt som i en Riemannintegral så kan vi säga att den första stapeln har höjd  $0^k$ , nästa  $1^k, 2^k, 3^k$  och så vidare. Om vi tänker oss att vi då vill fylla ut området under grafen så gör vi det bäst genom att ta fler och fler

staplar för en bättre och bättre approximation.

Rektangeln har alltid samma höjd,  $x^k$ . Därför får vi precis scenariot igen att:

Förhållandet mellan arean under  $y = x^k$  och rektangeln är

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + x^k}{x^k + x^k + x^k + x^k + \dots + x^k} = \frac{1}{k+1} \text{ då } x \rightarrow \infty$$

Då vi inför arean av rektangeln,  $x^{k+1}$ , och förhållandet  $\frac{1}{k+1}$  så får vi att:

$$\text{Arean under } (y = x^k) = x^{k+1} \frac{1}{k+1} = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Wallis landade alltså i en välkänd regel för integrering,  $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ . Detta utan att använda sambandet mellan derivatan och den primitiva funktionen.

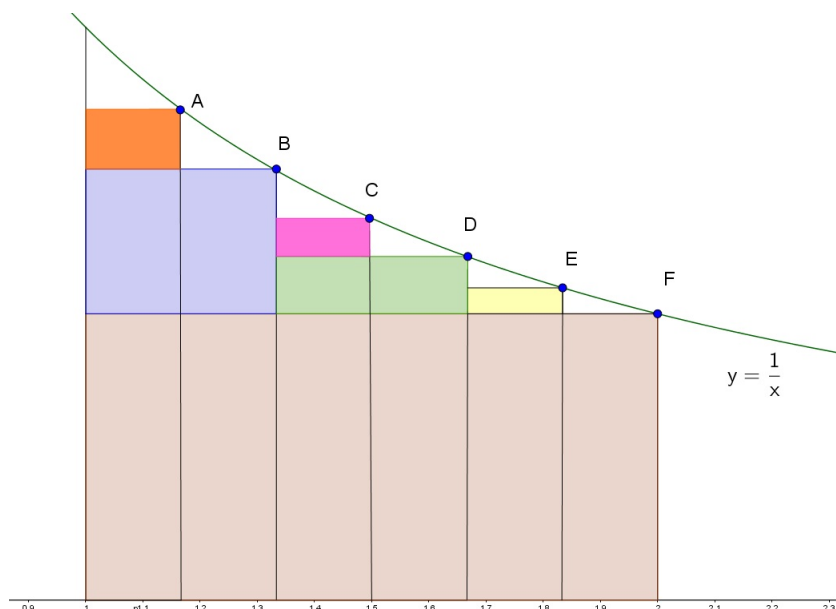
## 6.2 Brouncker

Det återstår dock att hantera  $\int x^k dx$ , då  $k = -1$ , detta undantag som Wallis gav.

Denna funktion,  $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ , är känd som Apollonius hyperbel efter Apollonius av Perga, nuvarande Turkiet. Apollonius var en framstående matematiker som är främst känd för sitt arbete med koniska sektioner och gav oss de namn vi använder för ellipsen, parabeln samt hyperbeln, därav namnet Apollonius hyperbel. [1,5]

Med moderna integreringsregler fås  $\int x^{-1} dx = \ln(x)$ .

Vi ska först titta på arean under Apollonius hyperbel mellan  $x = 1$  och  $x = 2$  för att ge ytterligare ett exempel på hur serier användes för beräkning av areor strax före Newton och Leibniz.



En brittisk matematiker, Brouncker, räknade ut arean under Apollonius hyperbel mellan  $x = 1$  och  $x = 2$  med hjälp av rektanglar och serier. Innan vi ser på Brounckers lösning bör vi dock betrakta den moderna lösningen:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

Brouncker löste problemet genom att rita in enkla rektangler i figuren på samma vis som bilden. Rektanglarna kan skapas på flera olika sätt med samma resultat.

Linjer och punkter är av enkla samband. [4] Vi försöker fylla ut med rektanglar för att bygga upp den figuren vi söker, arean under hyperbeln. Vi räknar därför ut arean av rektanglarna och adderar ihop vårt resultat.

Arean under den största rektangeln ges av  $A = b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ . Vår första rektangel har alltså area:

$$\text{Area}(\text{brun}) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

Vi skapar nästföljande rektanglar genom att dela in sträckan mellan 1 och 2 i tre lika delar. Detta avgränsar två rektanglar vid punkt  $B$  och  $D$  och vi får den blå och den gröna rektangeln.

$$\text{Area}(\text{blå}) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3+1} - \frac{1}{6} = \frac{2}{4 \cdot 6} = \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$\text{Area}(\text{grön}) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3+2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5 \cdot 6}$$

Därefter fortsätter vi dela upp sträckan mellan 1 och 2 i 6 lika delar vilket ger oss vår orange, rosa och gula rektangel vid respektive punkt  $A, C, E$ .

$$\text{Area}(\text{orange}): \frac{1}{6} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} - \frac{1}{1 + \frac{2}{6}} \right) = \frac{1}{6+1} - \frac{1}{6+2} = \frac{1}{7 \cdot 8}$$

$$\text{Area}(\text{lila}): \frac{1}{6} \left( \frac{1}{1 + \frac{3}{6}} - \frac{1}{1 + \frac{4}{6}} \right) = \frac{1}{6+3} - \frac{1}{6+4} = \frac{1}{9 \cdot 10}$$

$$\text{Area}(\text{gul}): \frac{1}{6} \left( \frac{1}{1 + \frac{5}{6}} - \frac{1}{1 + \frac{6}{6}} \right) = \frac{1}{6+5} - \frac{1}{6+6} = \frac{1}{11 \cdot 12}$$

För nästa uppsättning rektanglar så dubblar vi igen antalet delar mellan 1 och 2 till 12 lika delar.

Vi får då rektanglarna, ej utsatta i figuren:

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{2}{12}} \right) = \frac{1}{12+1} - \frac{1}{12+2} = \frac{1}{13 \cdot 14}$$

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{1 + \frac{3}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{4}{12}} \right) = \frac{1}{12+3} - \frac{1}{12+4} = \frac{1}{15 \cdot 16}$$

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{1 + \frac{5}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{6}{12}} \right) = \frac{1}{12+5} - \frac{1}{12+6} = \frac{1}{17 \cdot 18}$$

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{1 + \frac{7}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{8}{12}} \right) = \frac{1}{12 + 7} - \frac{1}{12 + 8} = \frac{1}{19 \cdot 20}$$

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{1 + \frac{9}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{10}{12}} \right) = \frac{1}{12 + 9} - \frac{1}{12 + 10} = \frac{1}{21 \cdot 22}$$

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{1 + \frac{11}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{12}{12}} \right) = \frac{1}{12 + 11} - \frac{1}{12 + 12} = \frac{1}{23 \cdot 24}$$

Brouncker insåg, vilket i denna uppställning inte ter sig så märkligt, att alla dessa rektanglars areor följde samma mönster.

Han fastslog att arean under Apollonius hyperbel mellan  $x=1$  och  $x=2$  ges av:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10} \dots$$

Denna serie kan skrivas om och bli ännu vackrare genom:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10} \dots =$$

$$\left( \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} \right) + \left( \frac{4}{3 \cdot 4} - \frac{3}{3 \cdot 4} \right) + \left( \frac{6}{5 \cdot 6} - \frac{5}{5 \cdot 6} \right) + \left( \frac{8}{7 \cdot 8} - \frac{7}{7 \cdot 8} \right) + \left( \frac{10}{9 \cdot 10} - \frac{9}{10 \cdot 9} \right) =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \dots$$

vilket kallas den alternerande harmoniska serien. Alternerande har givetvis med teckenbyten att göra medan harmonisk har sina kopplingar till akustik där den harmoniska serien är grundläggande i musik.

### 6.3 Mercator

För en mer allmän lösning vänder vi oss till Mercator, inte densamme som konstruerade Mercator-projektionen av kartor, som löste hur man bestämmer arean under Apollonius hyperbel. Han gjorde det genom att göra sig av med problemet att nämnaren blir noll helt och hållet. [4]

Mercator undersökte istället arean under  $y = \frac{1}{x+1}$ , det vill säga den flyttade grafen till Apollonius Hyperbel.

Han inledde med att helt dividera kvoten för att ta fram en potensserie. Vi kan göra det med exempelvis liggande stolen:

$$\begin{array}{r|l}
 1 - x + x^2 - x^3 \dots & \\
 \hline
 \begin{array}{r} 1 \\ -(1+x) \end{array} & 1+x \\
 \hline
 \begin{array}{r} -x \\ -(-x-x^2) \end{array} & \\
 \hline
 \begin{array}{r} x^2 \\ -(x^2+x^3) \\ \dots \end{array} & 
 \end{array}$$

Vi får alltså att  $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$

Vi "integrerar" varje term för sig och får  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \dots$

Det vi i själva verket gör är att vi utnyttjar det samband som Wallis fann för varje term och ser y som en summering av areorna under dessa olika figurer.

Denna serie, Mercators serie, kom senare att inkluderas i den mer allmänna naturliga logaritmen. Mercators serie brukar skrivas ut just som:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \dots$$

Mercator kände serien som en logaritm och den står publicerad i hans verk *Logarithmotechnia*. Däremot skulle kopplingen till infinitesimalkalkylen och talet  $e$  dröja ytterligare.

Vi noterar också att om vi sätter  $x=1$  får vi serien:

$$\ln(1 + 1) = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^6}{6} \dots =$$

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$$

vilket vi känner igen som den alternerande harmoniska serien Brouncker fann.

## 7 Cavalieris Princip

En trave mynt [10]



En annan metod för att beräkna areor och volymer är att utnyttja Cavalieris princip. Principen är till ytan uppenbar och kan illustreras med ett tanke-experiment. Vii tänker att vi har en stapel med enkronor och vi vet hur mycket volym stapeln med mynten har. Om vi puttar på stapeln så den står lite vingligt, hur mycket volym har alla mynten då? Det är uppenbart för oss att det måste vara samma volym. Vi kan alltså bestämma en volym av någon svårdefinierad stapel med mynt utan några problem.

Mer precist så säger Cavalieris princip att: [4]

Antag att vi har två områden, avgränsade av två parallella linjer. Om varje linje parallell med övriga två linjer skär områdena i segment av lika längd så har områdena lika area.

På samma sätt har vi i en metod för tre eller fler dimensioner. Vi kan formulera även för tre dimensioner som:

Antag att vi har två områden, avgränsade av två parallella plan. Om varje plan parallell med övriga två plan skär områdena i tvärsnitt av lika area så har områdena lika volym.

Om vi tänker oss situationen med mynten så börjar båda staplarna på ett bord och når samma höjd, två parallella plan. Om vi tänker oss ett plan parallellt med de två planen, exempelvis på samma höjd som mynt fem, så är det givet att den kommer skära båda staplarna med samma tvärsnittsarea, arean av myntet. Var vi än tänker



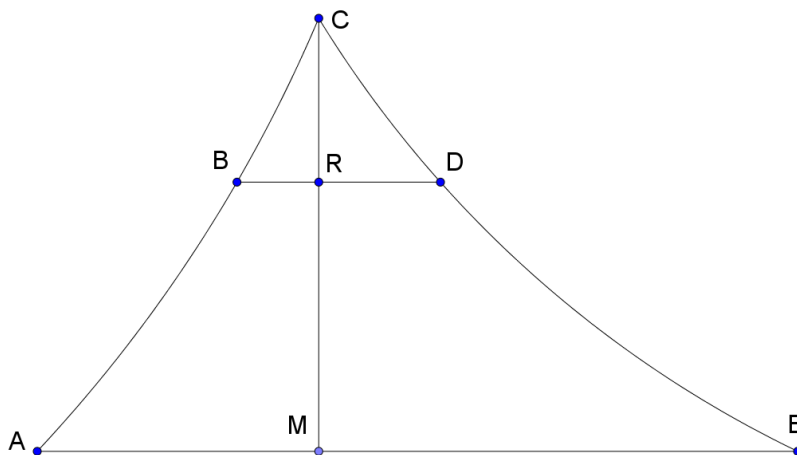
oss att vi lägger in ett parallellt plan så är det givet att tvärsnittsarean kommer vara arean av ett mynt, därför måste båda staplarna ha samma volym.

Det tycks uppenbart från vårt exempel att det förhåller sig på detta sätt. Det är dock av flera anledningar värt att studera varför det förhåller sig på det här sättet.

Cavalieris princip säger, lättast beskrivet i förhållandet volym, att om vi lägger lika många skivor av samma storlek på varandra så kommer de oavsett form att få samma volym. I principen utnyttjar vi dock tvärsnitt som våra skivor vilka inte i sig har någon höjd utan endast area, därmed saknar de volym.

För att principen ska kunna appliceras på volym krävs därför att vi tänker oss att vi staplar oändligt många tvärsnitt, som alla har oändligt liten höjd. För att kunna förklara metoden teoretiskt måste vi alltså arbeta med en form av infinitesimalkalkylen. Vi ser också dess likheter till den äldre uttömningsmetoden som bevisats kunna användas med oändligt många, oändligt små enheter.

Vi har exempel från Cavalieri själv som väl illustrerar hur metoden kan användas för även andra problem än likheter:



Cavalieri presenterar problemet för såväl två som tre dimensioner men vi väljer att fokusera på den tvådimensionella figuren som är lättare att illustrera. Cavalieri ger oss två figurer med samma höjd,  $CAM$  och  $CME$ . Vidare har vi två parallella linjer,  $BD$  samt  $AE$ , som skär figuren.

Vidare låter vi det vara funnet att linjesegmenten i den ena figuren alltid är i samma

proportion mot linjesegmenten i den andra. Det vill säga att  $BR : RD = AM : ME$ . Cavalieri påstår då att figuren  $CAM$  förhåller sig till figuren  $CME$  i precis samma proportion.

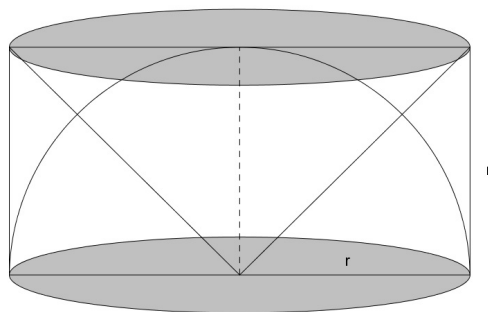
Cavalieris språkbruk för hans resonemang är något komplicerat men mynnar ut i detta; eftersom  $BD$  och  $AE$  är godtyckligt tagna parallella linjer och alla sådana linjer förhåller sig i samma proportioner så måste alla linjer i figuren  $CAM$  stå i samma proportion till alla linjer i figuren  $CME$  varför proportionerna mellan figurerna måste vara av samma proportion. Vi ser ju här arean av figurerna som basen multiplicerat med höjden. Höjden ansattes lika i början av vårt problem, basen utgörs givetvis av linjerna. Cavalieri noterar dock, vilket är mycket viktigt, att de olika höjderna är lika i båda figurerna därför att för varje höjd i figuren  $CAM$  kan formuleras en motsvarande höjd i  $CME$ . Cavalieri benämner enbart höjden som ett obestämt tal  $n$ , med moderna termer så ser vi de som infinitesimalt små.

Cavalieris princip kan således användas såväl för att bestämma likheter mellan figurer som proportioner. Vi kan illustrera det senare med ett mer applicerbart exempel.

## 7.1 Sfärens volym

Vi bestämmer sfärens volym med hjälp av konens samt cylinderns volym. Konen och cylindern har relativt enkla volymformler. Vi bevisade tidigare sambandet mellan konen och cylindern, förhållandet 1:3, och cylinderns volym får anses vara trivial.

Vi tänker oss en cylinder med radie  $r$  och höjd  $r$ . Inuti figuren lägger vi en kon och ett halvklot.



Cavalieris princip leder oss till att studera  $\Delta A$  för de tre olika figurerna där  $\Delta A$  noterar arean i ett plan av figuren. Samtliga figurers area kommer vara i formen av en cirkel med varierande radie.

Cylinderns area i ett givet plan ges av  $\Delta A_C = \pi r^2$ .

För konen får vi att, i ett givet plan,  $r = h$ , då radien ökar jämte höjden, varför vi får:  $\Delta A_K = \pi h^2$ .

För halvklotets radie i ett plan kan vi använda pythagoras sats. Halvklotets radie är  $r$  varför vi kan ställa upp en ekvation,  $x^2 + h^2 = r^2$ , för en given skiva  $\Delta A$  där radien i ett plan, på höjd  $h$ , ges av  $x$ . Vi får då att radien  $x = \sqrt{r^2 - h^2}$  vilket ger oss  $\Delta A_{HK} = \pi(r^2 - h^2)$ .

Volymen av de olika figurerna beräknas som  $V = n \cdot \Delta A$  där  $n$  är antalet skivor vilket vi låter gå mot oändligt. Således beror förhållandet av volymerna enbart på  $\Delta A$ .

Om vi ställer upp:

$$\Delta A_C - \Delta A_K = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2) = \Delta A_{HK}$$

så får vi att:

$$\text{halvklotets volym} = \text{cylinderns volym} - \text{konens volym}$$

Dessa formler är ju som bekant  $V_C = \pi r^2 h$  och  $V_K = \frac{\pi r^2 h}{3}$ .

Vi ansatte i figuren höjden till  $r$  varför vi kan skriva de som  $V_C = \pi r^3$  och  $V_K = \frac{\pi r^3}{3}$ .

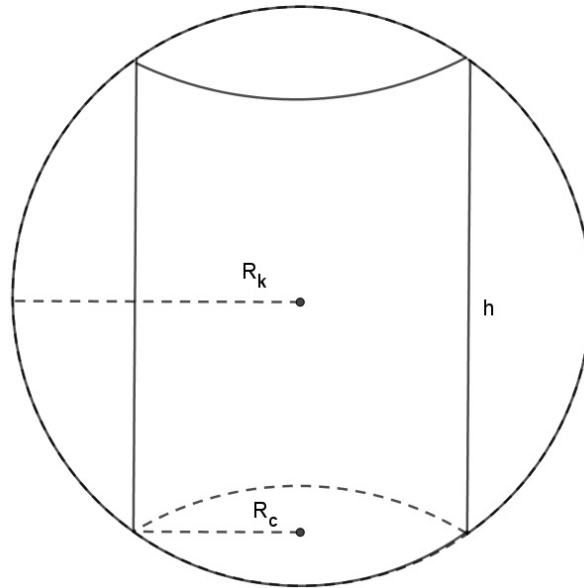
Om vi sätter allting tillsammans så får vi vårt sökta samband:

$$V_{\text{Sfär}} = 2V_{HK} = 2(V_C - V_K) = 2\left(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}\right) = 2\left(\frac{2\pi r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

## 7.2 Servettring

Vi använder återigen Cavalieris princip för att beräkna volymen av en servettring, ett annat typiskt exempel på metoden.

Vi tänker oss att vi borrar ett cylindriskt hål i ett klot så att vi får kvar en yttre ring. Vad har denna för volym?



Utifrån cavalieris princip vill vi undersöka tvärsnittsarean för varje lager i figuren. Vi ser direkt att arean vid en given höjd ges som differensen mellan den inre och den yttre cirkeln,  $\Delta A_{ring} = \Delta A_{yttre} - \Delta A_{inre}$ .

Radien av cylindern fås genom pythagoras sats till  $R_c = \sqrt{R_k^2 - (\frac{h}{2})^2}$ .

Vid en given höjd,  $y$ , så kan vi beräkna radien på de cirklar som utgör klotet genom:  $R = \sqrt{R_k^2 - y^2}$ . Arean för den yttre cirkeln blir således:

$$\Delta A_{yttre} = \pi R^2 = \pi \cdot \sqrt{R_k^2 - y^2}^2 = \pi \cdot (R_k^2 - y^2)$$

Den inre cirkeln ges liknande av:

$$\Delta A_{inre} = \pi R_c^2 = \pi \cdot \sqrt{R_k^2 - (\frac{h}{2})^2}^2 = \pi \cdot (R_k^2 - (\frac{h}{2})^2)$$

Vi får därför differensen för tvärsnittsarean som:

$$\Delta A_{yttre} - \Delta A_{inre} = \pi \cdot (R_k^2 - y^2) - \pi \cdot (R_k^2 - (\frac{h}{2})^2) = \pi \cdot ((\frac{h}{2})^2 - y^2)$$

Vi ser alltså att:

$$\Delta A_{ring} = \pi \cdot ((\frac{h}{2})^2 - y^2)$$

Med moderna metoder skulle vi nu enkelt räkna ut volymen med en integral men vi kan ännu enklare hitta volymen genom att notera vårt resultat.

Det vi kommit fram till är att radien av servettringen inte har någon påverkan på volymen. Vi kan därför sätta valfri radie för att bestämma volymen.

Vi ansätter radien som  $(h/2)$ , det vill säga vi borrar ett infinitesimalt litet hål sådant att servettringen blir, i effekt, ett klot. Vi kan då beräkna volymen av servettringen som:

$$V_{ring} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi(\frac{h}{2})^3}{3} = \frac{\pi h^3}{6}$$

## 8 Slutord

Vi har i de tidigare avsnitten behandlat många olika exempel på flera olika metoder av area- och volymeräkningar. Exakt hur de är uppställda och formulerade varierar genom tid och författare men det finns någonting som de, nästan allihop, har gemensamt.

De dansar kring begreppen oändligt, eller oändligt litet. Ingen, Wallis möjligtvis undantagen, vågar riktigt gå så långt som att försöka definiera, eller använda, begreppen. Det leder oss till två olika, motstående, slutsatser. Dels ser vi behovet av en definition och förståelse av de reella talen. Så många av de problem och de obekväma extra stegen som matematiker genom millennium har tvingats göra, skulle ha gått att undvika om en sådan definition var känd.

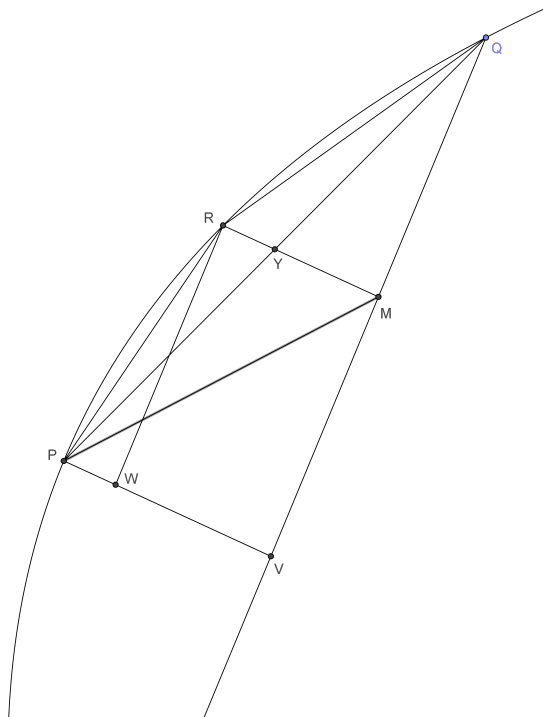
Men samtidigt så har det inte hindrat framsteg, utan bara, möjligtvis, bromsat in dem. Det faktum att varken Newton eller Leibniz, infinitesalkalkylens två fäder, använder sig av gränsvärden eller oändligheter, och därmed kringgår problematiken ytterligare en tid är väl det främsta beviset på det.

I och med *Metoden* så har vi en fingervisning om hur väl förstådda dessa ideer var hos Arkimedes, och därmed troligen även andra grekiska matematiker, även om bevisen för dessa metoder nästan helt har försvunnit genom åren. Arkimedes skulle själva aldrig påstå att han arbetade med oändligheter eller oändligt små storheter, även om hans metod på många sätt är väldigt lik.

Arkimedes skriver i sitt förord till *Metoden* att han ”*förmodar att metoden kommer att användas av nutida såväl som framtida generationer för att hitta satser vi ännu inte funnit*”. Att det skulle dröja ända fram till Newton och Leibniz innan det riktigt tog fart hade han nog aldrig kunnat ana.

## 9 Appendix

Bevis av parabelns ekvation,  $PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2$ : [7,8]



$W$  är en punkt på  $PV$  sådan att  $RW$  är parallell med  $QV$ .

Då ger oss parabelns ekvation att:  $PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2$ .

Vi inför koordinater,  $(X, Y)$ , för våra punkter:

$P = (X_P, Y_P)$ ,  $W = (X_W, Y_W)$ ,  $R = (X_R, Y_R)$ ,  $V = (X_V, Y_V)$ ,  $Q = (X_Q, Y_Q)$ , samt den icke utsatta skärningspunkten mellan kordan och parabeln som vi låter kalla  $Z = (X_Z, Y_Z)$ .

Vi låter parabeln vara på formen  $y = ax^2$  varifrån vi kan utläsa sambanden:  $Y_Z = a(X_Z)^2$ ,  $Y_P = a(X_P)^2$ ,  $Y_R = a(X_R)^2$  samt  $Y_Q = a(X_Q)^2$ .

Vidare bestämmer vi kordans lutning till:

$$k = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_Q - Y_Z}{X_Q - X_Z} = \frac{a(X_Q)^2 - a(X_Z)^2}{X_Q - X_Z} = \frac{a(X_Q + X_Z)(X_Q - X_Z)}{X_Q - X_Z} = a(X_Q + X_Z)$$

Derivering av  $Y_P = a(X_P)^2$  ger oss  $k = 2aX_P$ , varifrån vi löser ut:

$$X_P = \frac{X_Q + X_Z}{2}.$$

V är mittpunkt på kordan varför vi får  $X_V = X_P$  samt  $X_W = X_P$ .

$$\text{Vi tar även fram } Y_V = \frac{aX_Q^2 + aX_Z^2}{2}.$$

Vi beräknade tidigare kurvan  $QZ$ 's lutning till  $k = a(X_Q + X_Z)$ .  $RW$  är parallell varför dess lutning också ges av  $k$ .

$$PW = \sqrt{(Y_P - Y_W)^2 + (X_P - X_W)^2} = \sqrt{(Y_P - Y_W)^2 + (0)^2} = Y_P - Y_W.$$

Vi kan även uttrycka  $Y_W$  genom att ställa upp:

$$Y - aX_R^2 = a(X_Q + X_Z)(X - X_R) \text{ enligt enpunktsformeln.}$$

$$\text{Vi kan således ställa upp } Y_W - aX_R^2 = a(X_Q + X_Z)(X_W - X_R).$$

Enkel omskrivning ger oss  $Y_W - aX_W^2 = a(X_W - X_R)^2$  då vi nyttjar att  $\frac{X_Q + X_Z}{2} = X_W$ .

Vi använder nu dessa samband för att beräkna:

$$(\mathbf{RW})^2 = (Y_W - Y_R)^2 + (X_W - X_R)^2 =$$

$$(Y_W - aX_R^2)^2 + (X_W - X_R)^2 =$$

$$(a(X_Q + X_Z)((X_W - X_R))^2 + (X_W - X_R)^2 =$$

$$(X_W - X_R)^2(a^2(X_Q + X_Z)^2 + 1)$$

$$\mathbf{PV} = Y_V - Y_P =$$

$$\frac{aX_Q^2 + aX_Z^2}{2} - a\left(\frac{X_Q + X_Z}{2}\right)^2 = \frac{a}{4}(X_Q - X_Z)^2$$

$$(\mathbf{QV})^2 = (Y_V - Y_Q)^2 + (X_V - X_Q)^2 =$$

$$\left(\frac{aX_Q^2 + aX_Z^2}{2} - aX_Q^2\right)^2 + \left(\frac{X_Q + X_Z}{2} - X_Q\right)^2 =$$

$$a^2\left(\frac{X_Z^2 - X_Q^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_Z - X_Q}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{a^2}{4}(X_Z - X_Q)^2(X_Z + X_Q)^2 + \frac{1}{4}(X_Z - X_Q)^2 =$$

$$\frac{1}{4}(X_Z - X_Q)^2(a^2(X_Z + X_Q)^2 + 1)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{PW} &= Y_W - Y_P = Y_W - a\left(\frac{X_Q + X_Z}{2}\right)^2 = \\ &Y_W - aX_W^2 = a(X_W - X_R)^2 \end{aligned}$$

Vi samlar våra uttryck:

$$(QV)^2 = \frac{1}{4}(X_Z - X_Q)^2(a^2(X_Z + X_Q)^2 + 1)$$

$$(RW)^2 = (X_W - X_R)^2(a^2(X_Q + X_Z)^2 + 1)$$

$$PV = \frac{a}{4}(X_Q - X_Z)^2$$

$$PW = Y_W - aX_W^2 = a(X_W - X_R)^2$$

Vi använder nu dessa värden för att bevisa satsen:

$$PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2$$

$$\frac{\frac{a}{4}(X_Q - X_Z)^2}{a(X_W - X_R)^2} = \frac{\frac{1}{4}(X_Z - X_Q)^2(a^2(X_Z + X_Q)^2 + 1)}{(X_W - X_R)^2(a^2(X_Q + X_Z)^2 + 1)}$$

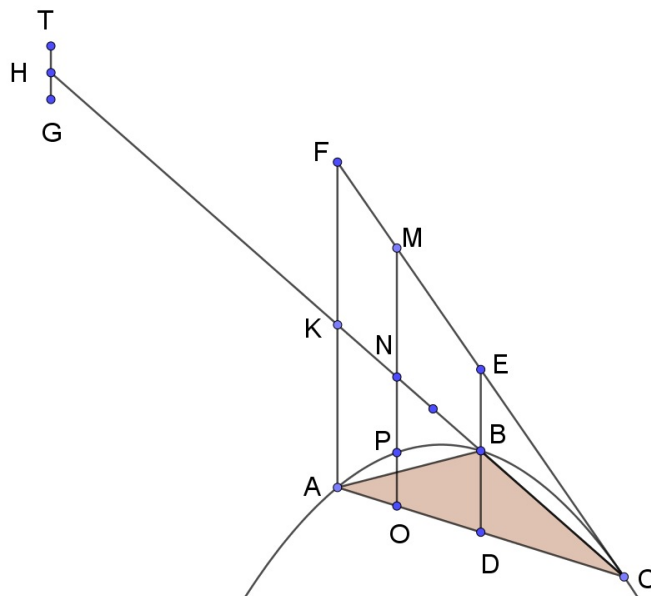
$$\frac{\frac{a}{4a}(X_Q - X_Z)^2}{(X_W - X_R)^2} = \frac{\frac{1}{4}(X_Q - X_Z)^2(a^2(X_Z + X_Q)^2 + 1)}{(X_W - X_R)^2(a^2(X_Z + X_Q)^2 + 1)}$$

$$\frac{(X_Q - X_Z)^2}{4(X_W - X_R)^2} = \frac{(X_Q - X_Z)^2}{4(X_W - X_R)^2}, \text{ v.s.v.}$$

Bevis hörande till Metoden:

$$DB = BE:$$

Vi utgår från samma figur:



Vi låter parabeln vara  $y = kx^2$ .

Således får vi koordinater  $(a, ka^2)$ ,  $(b, kb^2)$  och  $(c, kc^2)$ .

Linjen  $CA$  är dragen mellan punkterna  $A$  och  $C$  och vi kan således bestämma dess ekvation:

$$\text{Lutning} = \frac{kc^2 - ka^2}{c - a} = k(c + a).$$

Vi vet att  $B$  är dragen på en parallell tangent till  $AC$ . Tangenten till  $B$  ges via derivering till  $2kb$ . Vi kan således ställa upp:

$$2kb = k(c + a) \text{ och då vi löser för } b \text{ får vi } b = \frac{c + a}{2}.$$

Punkten  $B$  kan därför skrivas  $B = \left(\frac{c + a}{2}, k\left(\frac{a + c}{2}\right)^2\right)$ .

$D$  är mittpunkt på  $AC$  och har därför koordinater  $D = \left(\frac{c + a}{2}, \frac{kc^2 + ka^2}{2}\right)$ .

Linjen  $CE$  har lutning  $2kc$  då det är tangenten till parabeln i punkten  $C$  och vi kan finna dess lutning genom derivering.

Ekvationen för linjen  $CE$  fås således genom:  $y = 2kc \cdot x + m$

$$kc^2 = 2kc \cdot c + m \text{ och lösning för } m \text{ ger oss } m = -kc^2$$

Vi kan med hjälp av denna linje hitta  $y$ -värdet av punkten  $E$ :

$$y = 2kc \cdot \frac{c+a}{2} - kc^2 \text{ och lösning för } y \text{ ger } y = kca \text{ och då får vi } E = \left(\frac{c+a}{2}, kca\right)$$

Med hjälp av dessa punkter,  $B = \left(\frac{c+a}{2}, k\left(\frac{c+a}{2}\right)^2\right)$ ,  $D = \left(\frac{c+a}{2}, \frac{kc^2 + ka^2}{2}\right)$ ,  $E = \left(\frac{c+a}{2}, kca\right)$  så kan vi beräkna längderna  $DB$  och  $BE$ .

$$DB = \left(k\left(\frac{c+a}{2}\right)^2 - \frac{kc^2 + ka^2}{2}\right) \text{ och}$$

$$BE = \left(kca - k\left(\frac{c+a}{2}\right)^2\right).$$

$$DB = \left(k\left(\frac{c+a}{2}\right)^2 - \frac{kc^2 + ka^2}{2}\right) = \frac{1}{4}k(c^2 + 2ac + a^2) - \frac{1}{4}k(2c^2 + 2a^2) = \frac{1}{4}k(2ac - c^2 - a^2)$$

$$BE = \left(kca - k\left(\frac{c+a}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}k(4ca) - \frac{1}{4}k(c^2 + 2ac + a^2) =$$

$$\frac{1}{4}k(2ac - c^2 - a^2).$$

Därför kan vi dra slutsatsen att  $DB = BE$ .

## 10 Litteratur

- [1] D.M. Burton; The History of Mathematics - An Introduction; McGraw-Hill 2011, sjätte upplagan; IMDB: 978-0-07-338315-6
- [2] T.L. Heath; The Works of Archimedes; Dover Publications Inc. 2002; ISBN: 978-0-486-42084-4
- [3] Euklides; Elementa; Via: <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>, (2018-01-07, 11:31)
- [4] J. Stedall; Mathematics Emerging - A Sourcebook 1540-1900; Oxford University Press 2008; ISBN: 978-019-922690-0
- [5] J. Thompson - Historiens matematik - Studentlitteratur 1991 - ISBN: 91-44-31011-0
- [6] E.J. Dijksterhuis - Archimedes - Princeton University Press 1987 - ISBN: 0-691-02400-6
- [7] M. Reeder - Archimedes' Quadrature of the Parabola - Via: <https://www2.bc.edu/mark-reeder/1103quadparab.pdf>, (2018-01-07, 11:35)
- [8] C.E. DeSouza - The Greek Method of Exhaustion: Leading the Way to Modern Integration, M.S Thesis - Ohio State University 2012

### 10.1 Grafik

- [9] Charlesjsharp - Sharp Photopgraphy - via Wikimedia Commons: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Saqqara\\_pyramid\\_ver\\_2.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Saqqara_pyramid_ver_2.jpg), (2018-01-0, 22:01)
- [10] Jeff Belmonte - via Creative Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contando\\_Dinheiro\\_\(8228640\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contando_Dinheiro_(8228640).jpg), (2018-01-0, 22:01)