



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Randvärden för Cauchy-integraler

av

Anna Norrgård

2018 - No K7

Randvärden för Cauchy-integraler

Anna Norrgård

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Annemarie Luger

2018

Abstrakt

Den här uppsatsen behandlar Cauchy-integraler och situationer där vi har singulariteter på kurvor. Om man vill beräkna integralen av en funktion längs en kurva och funktionen har en singularitet på kurvan, så kan vi inte beräkna värdet av integralen direkt. För att ändå evaluera sådana integraler använder vi Cauchys principalvärde. Vi tar också upp och bevisar Sokhotski-Plemelj formlerna. Dessa formler hjälper oss att hitta gränsvärden för integralen när vi närmar oss singulariteten. Avslutningsvis så tar vi upp Hilbert-transformen som ett exempel på ett område där teorin kring Cauchy-integraler och Sokhotski-Plemelj formlerna kommer till användning.

Tack

Jag vill tacka min handledare Annemarie Luger för förslaget på ämne och råd och hjälp under arbetets gång.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Konturintegraler och Cauchys integralformel	2
2.1	Cauchys integralsats och integralformel	2
2.2	Cauchys principalvärde	5
2.3	Laurentserier, Residyteori och Jordans lemma	7
2.4	Ett exempel på en konturintegral	11
3	Sokhotski-Plemelj formlerna	14
3.1	Hoppdiskontinuiteten w	14
3.2	Hölderkontinuitet	15
3.3	Plemelj-formlerna	17
4	Hilbert-transformen	26
4.1	Några egenskaper hos Hilbert-transformen	27
4.2	Några exempel på Hilbert-transformer	28
4.3	Riemann-Hilbert problemet	30
5	Litteratur	33

1 Inledning

Två viktiga områden inom komplex analys är Cauchy integraler och Sokhotski-Plemelj form-lerna. Cauchys integralsats och integralformel är grundläggande verktyg inom komplex analys vid beräkning av konturintegraler. Sokhotski-Plemelj form-lerna hjälper oss att värdera integraler när integranden har en singularitet. Syftet med det här kandidatarbetet kommer att vara just att undersöka kurvintegraler och hur man ska behandla situationer där vi har en singularitet på en kurva.

I kapitel 2 går vi igenom grundläggande teori kring Cauchy integraler. Integraler som har formen

$$\int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz$$

brukar kallas för Cauchy integraler. Funktionen $f(z)$ brukar ibland benämnas densitetsfunktio-nen för Cauchy integralen och funktionen $\frac{1}{z - \omega}$ brukar kallas Cauchy-kärnan (Lu 1993, s. 2; King 2009, s. 107). Cauchys integralsats och integralformel är centrala och grundläggande inom kom-plex analys. För att kunna beräkna Hilbert-transformen i situationer när vi har singulariteter i integrationsintervallet används Cauchys principalvärde.

I kapitel 3 behandlar vi Sokhotski-Plemelj form-lerna och en stor del av uppsatsen ägnar vi åt att bevisa dessa formler. Om vi vill beräkna integralen av en funktion f längs en kurva och funktionen har en singularitet på kurvan, så kan vi inte beräkna värdet av integralen direkt. Plemelj-form-lerna hjälper oss att hitta gränsvärden för integralen när vi närmar oss singulariteten. Om vi integrerar över en sluten kurva och vi har en singularitet på kurvan, så ger form-lerna oss gränsvärden för integralen när vi närmar oss singulariteten från kurvans utsida och från dess insida.

I kapitel 4 ska vi se på ett exempel på ett område där teorin i kapitel 2 och 3 kommer till användning; nämligen Hilbert-transformen. Hilbert-transformen har många tillämpningsområden, inom allt från elektroteknik och radiokommunikation till analys av aktiepriser. Vi tar upp några av trans-formens egenskaper och ser på några exempel där teorin i kapitel 2 kommer till användning. Avs-lutningsvis så tar vi upp sambandet mellan Hilbert-transformen och Plemelj-form-lerna. Sambandet kan man finna i en grupp av problem som kallas Riemann-Hilbert problemen.

2 Konturintegraler och Cauchys integralformel

Cauchys integralsats och integralformel, samt Cauchys principalvärde är grundläggande och viktiga verktyg inom komplex analys vid beräkningarna av konturintegraler. En förutsättning för att teorin om Cauchy integraler ska fungera och vi ska kunna beräkna vissa konturintegraler är att funktionerna vi använder i beräkningarna är analytiska. Att en komplex funktion är analytisk i en öppen mängd D i det komplexa planet innebär att den är komplext deriverbar i varje punkt i D . Funktionen är analytisk i en punkt om den är analytisk i ett område nära punkten. Om en funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, är analytisk i området D innebär det också att den uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

i varje punkt i området. (Saff och Snider 2014, s. 70-73)

2.1 Cauchys integralsats och integralformel

Vi kan nu anta att vi har ett område $D \subseteq \mathbb{C}$ som är enkelt sammanhängande, det vill säga det har egenskapen att varje sluten kurva kan deformeras till en punkt utan att kurvan behöver lämna området. Vi antar också att vi har en kurva C som ligger i D och att kurvan har startpunkt a och ändpunkt b . Om en funktion f är kontinuerlig i området D och har en primitiv funktion F i D så är f analytisk, och dess integral över kurvan C kan beräknas genom

$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Värdet av en komplex integral över en analytisk funktion är alltså enbart beroende av vilka start- och ändpunkterna är och är oberoende av vilken väg man tar mellan dessa punkter. Det här betyder också att om vi under samma förhållanden har en kurva där start- och slutpunkt är en och samma punkt så kommer vi att få en loop C där integralen för funktionen över loopen är 0. Det här leder oss till Cauchys integralsats. Detta kapitel (kapitel 2.1) är baserat på teorin i Saff och Snider (2014, kapitel 4 och 6).

Teorem 1. Cauchys integralsats

Om f är en analytisk funktion i det enkelt sammanhängande området D så är

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

för varje sluten kurva C .

Om integranden däremot har en singularitet i området innanför kurvan C så är definitionsmängden för integranden inte ett enkelt sammanhängande område. I sådana fall kan vi inte använda Cauchys integralsats och värdet av integralen behöver inte vara 0. Vissa sådana integraler kan istället beräknas med hjälp av Cauchys integralformel.

Teorem 2. Cauchys integralformel

Funktionen f är analytisk i det enkelt sammanhängande området D . Om C är en enkel sluten kurva som är positivt orienterad i området D så är

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz,$$

när punkten ω ligger innanför kurvan C .

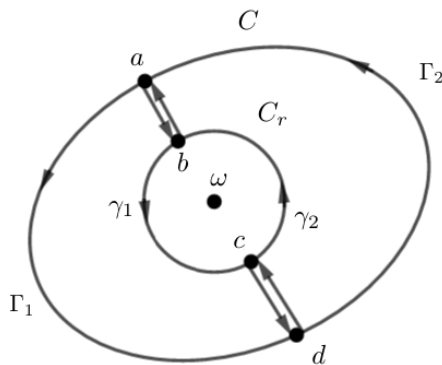
Bevis av Teorem 2.

Vi ska nu bevisa Cauchys integralformel. Vi antar att funktionen f är analytisk i det enkelt sammanhängande området D och att $\frac{f(z)}{z - \omega}$ är analytisk i hela D förutom i punkten ω . Kurvan C ligger i D och är enkel och sluten.

Vi börjar beviset med att visa att integralen

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz$$

över kurvan C kommer ha samma värde som integralen över ett en liten cirkel C_r , med radien r och centrum i singulariteten ω , i D . Vi kan göra antagandet på samma sätt som i kapitel 4.4 i (Saff och Snider 2009, s. 196). Vi ritar en liten cirkel C_r kring ω och förbinder sedan C_r med C med hjälp av linjesegment mellan punkterna a och b och punkterna c och d . Kurvstycket Γ_1 går från a till d och Γ_2 går från d till a på kurvan C . Kurvstycket γ_1 går från b till c och γ_2 går från c till b på kurvan C_r . Vi får en situation som kan ses i Figur 1.



Figur 1: Uppdelning av kurvorna C och C_r .

Integranden $\frac{f(z)}{z - \omega}$ är analytisk i hela området D utom i punkten ω . Det innebär att integranden är analytisk i området som omsluts av Γ_1 , linjestycket från a till b , γ_1 och linjestycket från c till d .

Den är också analytisk i området som omsluts av Γ_2 , linjestycket från d till c , γ_2 och linjestycket från b till a . Därför får vi att

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-\omega} dz = \int_{ab} \frac{f(z)}{z-\omega} dz + \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-\omega} dz + \int_{cd} \frac{f(z)}{z-\omega} dz$$

och att

$$\int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z-\omega} dz = \int_{dc} \frac{f(z)}{z-\omega} dz + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-\omega} dz + \int_{ba} \frac{f(z)}{z-\omega} dz.$$

Vi kan addera dessa integraler. De linjesegment vi adderat tar ut varandra, eftersom de går i motsatta riktningar. Alltså får vi att

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z-\omega} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-\omega} dz.$$

Vi kan skriva om integranden för integralen över C_r så att vi får

$$I = \int_{C_r} \frac{f(z) + f(\omega) - f(\omega)}{z-\omega} dz = \int_{C_r} \frac{f(\omega)}{z-\omega} dz + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\omega)}{z-\omega} dz.$$

Funktionen $f(\omega)$ är konstant och oberoende av z och vi kan beräkna integralen $\int_{C_r} \frac{1}{z-\omega} dz$ så att vi får värdet $2\pi i$.

Alltså får vi att

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\omega} dz = f(\omega)2\pi i + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\omega)}{z-\omega} dz.$$

Om vi nu kan bevisa att höger term i höger led har värdet 0 är vi klara med beviset. Vi kan notera att vänster led är integralen över C och oberoende av cirkeln med radien r . Vänster del av höger led är en konstant och alltså också oberoende av radien r . I och med att övriga delar är oberoende av r måste den högra termen i höger led också vara det. Om vi till exempel låter $r \rightarrow 0$ kan värdet av integralen i höger led inte förändras. Alltså gäller också att

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\omega} dz = f(\omega)2\pi i + \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\omega)}{z-\omega} dz.$$

Integranden i höger del av höger led kan betraktas som funktionen

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}, & z \neq \omega \\ f'(z), & z = \omega \end{cases}$$

som är kontinuerlig i hela D . Det innebär också att funktionen är begränsad.

Vi kan nu beräkna värdet av integralen och enligt triangelolikheten är

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz \right| \leq \int_{C_r} \left| \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} \right| |dz|.$$

Eftersom vi har konstaterat att $h(z)$ är begränsad så har absolutbeloppet av funktionen en övre gräns i D som vi kallar M_r . Vi får

$$\int_{C_r} \left| \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} \right| |dz| \leq \int_{C_r} M_r |dz| = M_r \int_{C_r} 1 |dz|.$$

Omkretsen av cirkeln C_r är $2\pi r$ och vi får

$$M_r \int_{C_r} 1 |dz| = M_r 2\pi r.$$

Vi kan nu låta $r \rightarrow 0$. Vi får då att $M_r 2\pi r = 0$ och därmed är

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz = 0.$$

Alltså har vi visat att

$$\int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz = f(\omega) 2\pi i.$$

□

2.2 Cauchys principalvärde

Integraler som har formen $\int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz$ kommer alltså att ha värdet 0 om punkten ω ligger utanför den slutna kurvan C , och värdet $2\pi i f(\omega)$ om ω ligger innanför. Om punkten däremot ligger på kurvan så uppstår det problem och vi kommer få en situation där vi har 0 i nämnaren i integranden. Kapitel 2.2 är baserat på teorin i King (2009, kapitel 2), Lu (1993, kapitel 1) och Saff och Snider (2014, kapitel 6).

Ett sätt att lösa situationer där vi har en eller flera singulariteter i ett integrationsintervall är att använda Cauchys principalvärde. Vi tar här upp tre olika definitioner av principalvärdet, beroende på vilken typ av singularitet det är fråga om. Det första fallet är när en singularitet finns i en punkt i ett integrationsintervall $]a, b[\subset \mathbb{R}$. Det andra fallet är när man har en kontinuerlig funktion och ett oändligt integrationsintervall $(-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}$. Det sista fallet vi tar upp är situationen när vi har en singularitet på en kurva i det komplexa planet.

Vi börjar med att definiera principalvärdet i fallet med en singularitet i en punkt i intervallet $]a, b[$. Vi antar att funktionen $f(x)$ integreras över intervallet $[a, b]$ och att funktionen har en singularitet i punkten ω , i intervallet $]a, b[$. Om vi delar på integrationsintervallet vid ω och i stället använder integrationsgränserna $\omega - \epsilon$ och $\omega + \epsilon$ kan vi definiera principalvärdet av integralen av funktionen som

$$p.v. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{\omega-\epsilon} f(x)dx + \int_{\omega+\epsilon}^b f(x)dx \right].$$

Värdet av det här gränsvärdet kallas Cauchys principalvärde.

Om vi i stället har en generaliserad integral görs en annan definition av principalvärdet. Om vi har en funktion $f(x)$ som är kontinuerlig över intervallet $(-\infty, \infty)$ så kommer principalvärdet av integralen av funktionen att definieras som

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx.$$

Gränsvärdet kallas för principalvärdet för integralen.

Slutligen så betraktar vi Cauchy integralen

$$\int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz, \quad \omega \in C.$$

Integralen ovan har en singularitet i punkten ω på den slutna kurvan C i det komplexa planet, och den konvergerar generellt inte. Definitionen av principalvärdet för denna integral förklaras enligt Lu (1993, s. 7-8) på följande sätt. Vi kan låta ω vara mittpunkten i en cirkel med en liten radie η . Vi antar att z_1 och z_2 är skärningspunkterna mellan denna cirkel och C och att C_η är den del av C som ligger mellan dessa skärningspunkter. Om vi tar bort C_η från C och låter $\eta \rightarrow 0$ har vi gränsvärdet

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{C-C_\eta} \frac{f(z)}{z - \omega} dz.$$

Enligt Lu (1993, s. 8) kan detta gränsvärde existera och vi definierar det som principalvärdet för integralen, det vill säga

$$p.v. \int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{C-C_\eta} \frac{f(z)}{z - \omega} dz.$$

Exempel 2.2.1

Vi ska nu se på ett exempel där vi beräknar integralen

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx.$$

Integranden $\frac{1}{x}$ är inte kontinuerlig i punkten $x = 0$ och integralen konvergerar inte. Cauchys principalvärde för integralen existerar däremot. Vi delar upp integrationsintervallet och utesluter $x = 0$ och får då

$$\begin{aligned}
p.v. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left((\ln |-\epsilon| - \ln |-1|) + (\ln |1| - \ln |\epsilon|) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Principalvärdet är alltså 0. Även om integralen divergerar och vi inte kan beräkna den direkt, så kan vi i det här fallet ändå tilldela den ett värde, det vill säga principalvärdet.

2.3 Laurentserier, Residyteori och Jordans lemma

Residyteori och Jordans lemma är användbara vid beräkning av konturintegraler. Vi kommer senare att använda teorin i några av de exempel vi tar upp, därför presenterar vi den här. Men teorin är inte i fokus i den här uppsatsen i övrigt. Teorin i detta kapitel är hämtad från King (2009, s. 30-35) och Saff och Snider (2014, s. 269, s. 308-312, s. 340). Vi börjar med att definiera en Laurentserie och en residy.

Definition 1. Laurentserier

Vi antar att funktionen f är analytisk i området $K : r < |z - \omega| < R$. Vi låter $0 \leq r < R \leq \infty$. Då kan funktionen ges av Laurentserien

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \omega)^n$$

i K . Serien konvergerar i området K och konvergerar likformigt i alla områden $r < \rho_1 \leq |z - \omega| \leq \rho_2 < R$. Koefficienten a_n fås av

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \omega)^{n+1}} dz.$$

Definition 2. Residy

Om funktionen f har en isolerad singularitet i ω så kallas koefficienten a_{-1} i funktionens Laurentserie för residyn;

$$Res(f, \omega),$$

av f i ω .

För en funktion f som har en pol med ordning m kan residyn beräknas med hjälp av formeln

$$Res(f, \omega) = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - \omega)^m f(z)].$$

Residyteorin behövs bland annat vid beräkning av konturintegraler. Då kommer Cauchys residysats till användning.

Teorem 3. Cauchys residysats

Antag att funktionen f är analytisk inuti och på en enkel sluten kurva C utom i ett ändligt antal punkter $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ som ligger i området inuti kurvan C . Då är värdet av integralen över kurvan

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, \omega_k).$$

Bevis för Teorem 3

Vi ska nu bevisa Cauchys residysats. Vi antar att funktionen f är analytisk inuti och på en enkel sluten kurva C , utom i ett ändligt antal punkter $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ som ligger i området inuti kurvan C .

Vi börjar med att evaluera integralen

$$\int_C f(z)dz$$

när f har endast en singularitet inuti kurvan C . På samma sätt som i beviset av Teorem 2 i Kapitel 2.2, kan vi ersätta kurvan C med en liten cirkel C_r med radien r och centrum i singulariteten ω . Hela cirkeln C_r befinner sig inuti kurvan C . Vi får alltså att

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_r} f(z)dz.$$

Funktionen f är analytisk inuti och på C_r , utom i punkten ω . Därför kan funktionen representeras av potensserien

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\omega)^n,$$

som är likformigt konvergent inuti ett område som består av cirkeln C_r med punkten ω borttagen. Då får vi också att

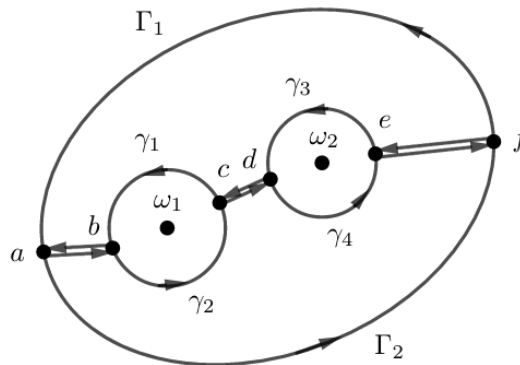
$$\begin{aligned} \int_{C_r} f(z)dz &= \int_{C_r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(z-\omega)^n dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{C_r} (z-\omega)^n dz \\ &= \dots + a_{-3} \int_{C_r} (z-\omega)^{-3} dz + a_{-2} \int_{C_r} (z-\omega)^{-2} dz + a_{-1} \int_{C_r} (z-\omega)^{-1} dz \\ &\quad + a_0 \int_{C_r} 1 dz + a_1 \int_{C_r} (z-\omega)^1 dz + \dots \end{aligned}$$

$$= \dots 0 + 0 + a_{-1} \int_{C_r} (z - \omega)^{-1} dz + 0 + \dots$$

Alla integraler utom integralen för a_{-1} har primitiva funktioner och får värdet 0. Vi får att

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_r} f(z) dz = a_{-1} 2\pi i = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \omega).$$

Vi har alltså visat vad som händer när f har en singularitet i C och ska nu undersöka vad som händer när vi har fler än en singularitet inuti C . Vi kan också nu använda oss av samma metod som i beviset av Teorem 2 i Kapitel 2.2. Där ersatte vi alltså en större kurva med en liten cirkel inuti kurvan, med centrum i singulariteten ω . Om vi har flera singulariteter inuti kurvan kan vi bilda en liten cirkel runt var och en av singulariteterna så att varje liten cirkel endast innehåller en singularitet. Vi kan nu som exempel anta att vi har en kurva Γ och en funktion f som är analytisk inuti och på kurvan utom i två punkter ω_1 och ω_2 . Vi ritar mindre cirklar runt var och en av punkterna och förbinder sedan de mindre cirkarna med Γ och med varandra, som i Figur 2.



Figur 2: Uppdelning av kurvan Γ .

Funktionen f är analytisk i området som omsluts av Γ_1 , linjestyckena fe , dc och ba , och γ_1 och γ_3 . Därför får vi att

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{fe} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{dc} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{ba} f(z) dz.$$

På motsvarande sätt kommer vi fram till att

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{ab} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{cd} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz + \int_{ef} f(z)dz.$$

Om vi adderar integralerna ovan så tar linjestyckena ut varandra och vi får att

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3+\gamma_4} f(z)dz.$$

På motsvarande sätt kan vi nu ersätta C med n stycken mindre cirklar γ_k med centrum i ω_k , $k = 1, \dots, n$. Då får vi att

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz.$$

Eftersom ω_k är den enda singulariteten inuti cirkeln γ_k får vi att

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \omega_k).$$

Då får vi att

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, \omega_k).$$

□

Nästa lemma är också användbart vid beräkning av konturintegraler. Lemmat är hämtat från Saff och Snider (2009, s. 340).

Lemma 1.

Funktionen f har en enkel pol i punkten ω och C_r är en cirkelbåge med centrum i ω . Vi definierar C_r på följande sätt

$$z = \omega + re^{i\theta}, \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2).$$

Integralen av f över C_r kan beräknas som

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, \omega).$$

Ett annat användbart lemma vid beräkning av konturintegraler är Jordans lemma. I King (2009, s. 30-31) presenteras lemmat på följande sätt.

Lemma 2. (Jordans lemma)

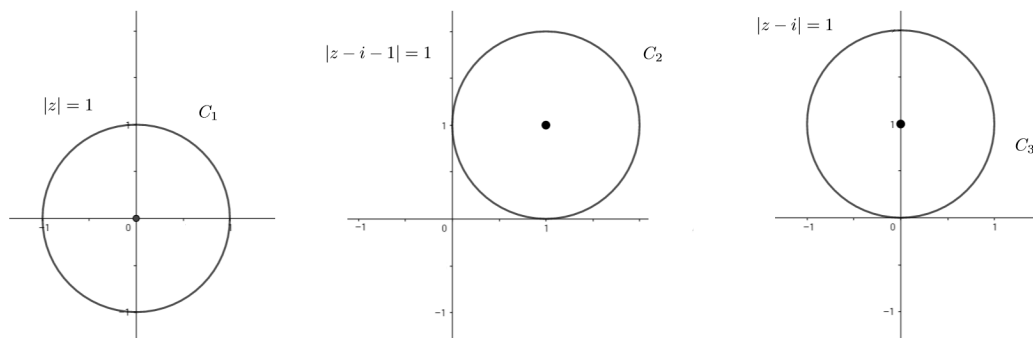
Vi antar att funktionen f är analytisk i den övre halvan av det komplexa talplanet, utom i ett ändligt antal punkter. Vi antar också att $|f(z)| \rightarrow 0$ likformigt när $|z| \rightarrow \infty$ för alla z sådana att $0 \leq \arg(z) \leq \pi$. C_r^+ är en halvcirkel i övre halvplanet med radien r och mittpunkt på reella talaxeln och $m > 0$, då gäller att

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r^+} e^{imz} f(z) dz = 0.$$

I nästa kapitel ska vi gå igenom ett exempel med Cauchy-integraler där också residyteorin kommer till användning.

2.4 Ett exempel på en konturintegral

Vi har konstaterat att integraler som har Cauchy-formen $\int_C \frac{f(z)}{z-\omega} dz$ kommer ha värdet 0 om punkten ω ligger utanför kurvan, och värdet $2\pi i f(\omega)$ om ω ligger inuti kurvan. Vi ska nu se på ett enkelt exempel där vi beräknar integralen $\int_C \frac{1}{z} dz$ över de enkla slutna kurvorna C_1 , C_2 och C_3 i Figur 3. $\int_C \frac{1}{z} dz$ kan ses som en Cauchy-integral där $f(z) = 1$ och $w = 0$.



Figur 3: Kurvorna C_1 , C_2 och C_3 .

Integralen över kurvan C_1 ; $|z| = 1$, har värdet

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

och integralen över kurvan C_2 ; $|z - i - 1| = 1$, har värdet

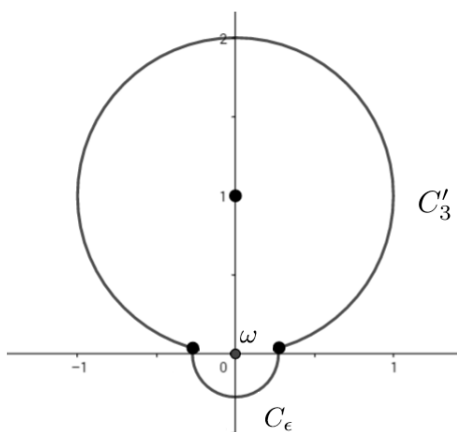
$$\int_{C_2} \frac{1}{z} dz = 0,$$

enligt Cauchys integralsats och Cauchys integralformel.

Om vi däremot ska beräkna samma integral över kurvan C_3 ; $|z-i| = 1$ kommer vi ha en singularitet i origo och kurvan kommer inte att vara sluten. Nu är det snarare integralen

$$p.v. \int_{C_3} \frac{1}{z} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \frac{1}{z} dz$$

vi ska beräkna. Vi kan dock göra om kurvan C_3 till en sluten kurva så att vi kan beräkna integralen för funktionen. Vi adderar en indragning mot antingen utsidan eller insidan av kurvan C_3 så att vi får en liten halvcirkel med radien ϵ , där $\epsilon \rightarrow 0$, som omsluter singulariteten. Vi får då kurvan i Figur 4 nedan.



Figur 4: Kurvan $C'_3 + C_\epsilon$.

Vi har nu alltså en sluten kurva som består av C_ϵ och C'_3 . Kurvan C'_3 är den del av C_3 som återstår när indragningen C_ϵ är borttagen och

$$p.v. \int_{C_3} \frac{1}{z} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'_3} \frac{1}{z} dz.$$

Vi får

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'_3 + C_\epsilon} \frac{1}{z} dz = p.v. \int_{C_3} \frac{1}{z} dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz.$$

Som vi redan nämnde är principalvärdet den del vi söker efter. Vi vet att $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'_3 + C_\epsilon} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ enligt Cauchys integralformel och $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz$ kan vi beräkna med Residyteori. Vi får

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'_3 + C_\epsilon} \frac{1}{z} dz = p.v. \int_{C_3} \frac{1}{z} dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2\pi i = p.v. \int_{C_3} \frac{1}{z} dz + i(\pi - 0) \operatorname{Res}(f, 0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2\pi i = p.v. \int_{C_3} \frac{1}{z} dz + \pi i$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$p.v. \int_{C_3} \frac{1}{z} dz = \pi i.$$

Integralen över kurvan C_3 är alltså πi . Man kan notera att det är medelvärdet av värdena vi fick vid integrationen över kurvorna C_1 och C_2 .

3 Sokhotski-Plemelj formlerna

I kapitel 2 såg vi hur man med hjälp av Cauchys principalvärde kan beräkna värdet av integraler trots att vi har singulariteter i integrationsområdet. Men hur kan man vara säker på att värdet av sådana integraler faktiskt existerar? Sokhotski-Plemelj formlerna, som ofta bara kallas Plemelj formlerna, har fått sitt namn efter Julian Sokhotski och Josip Plemelj. Sokhotski presenterade formeln 1873 och Plemelj återupptäckte och vidareutvecklade dem i början av 1900-talet (King 2009, s. 111). Om vi vill beräkna integralen av en funktion f längs en kurva och funktionen har en singularitet på kurvan, så kan vi inte beräkna värdet av integralen i singulariteten direkt. Med Plemelj-formlerna kan vi dock hitta uttryck för integralens värde utanför och innanför singulariteten, under vissa förutsättningar. Plemelj-formlerna använder sig av Cauchys principalvärde.

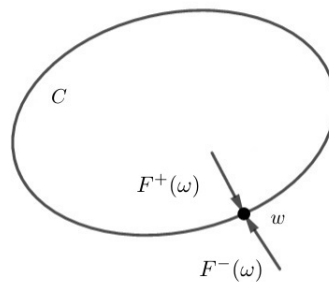
I det här kapitlet kommer vi enbart att integrera över glatta kurvor. Glatta kurvor och bågar är enkelt beskrivet kurvor utan spetsar. Mer precist kan en glatt kurva beskrivas som en funktion $z(t)$, $a \leq t \leq b$, vars derivator i intervallet $[a, b]$ alltid är olika noll och dessutom kontinuerliga (Saff och Snider 2014, s. 150). Alla kurvor i det här kandidatarbetet kan beskrivas som glatta eller som kurvor som består av sammanhängande styckvis glatta kurvbågar. Förutom där andra källor anges så är teorin i kapitel 3 baserad på King (2009, kapitel 3) och Lu (1993, kapitel 1).

3.1 Hoppdiskontinuiteten w

Vi antar nu att vi vill beräkna integralen

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z} dt.$$

Kurvan C är enkel och sluten och ω är en punkt på kurvan. Om $z = \omega$ får vi en singularitet i integranden och integralen $F(\omega)$ är inte identifierad. Vi ska i kapitel 3 undersöka vad som händer med $F(z)$ när $z \rightarrow \omega$ från kurvans utsida respektive insida. Se Figur 5. För att göra det använder vi beteckningarna $F^+(\omega)$ och $F^-(\omega)$, som vi definierar i nästa stycke.



Figur 5: z närmar sig ω från insidan och utsidan.

Vi låter alltså

$$F^+(\omega)$$

vara integralens värde när z närmar sig ω från insidan (positiva sidan). Om vi föreställer oss att vi gör en indragning av kurvan som omringar ω så finns alltså punkten på kurvans utsida och $z \rightarrow \omega$ från insidan. Integralens värde i punkten ω definieras som värdet av gränsvärdet

$$F^+(\omega) := \lim_{z \rightarrow \omega} F(z).$$

På samma sätt låter vi

$$F^-(\omega)$$

vara integralens värde när z närmar sig ω från utsidan (negativa sidan). Punkten ω befinner sig nu på kurvans utsidan och integralens värde i punkten ω definieras som

$$F^-(\omega) := \lim_{z \rightarrow \omega} F(z).$$

Generellt så kan man inte förvänta sig att gränsvärdena $F^+(\omega)$ och $F^-(\omega)$ är samma värde och $F(z)$ är i sådana fall inte kontinuerlig i hela D . Vid ω finns alltså en hoppsdiskontinuitet där $F^+(\omega) \neq F^-(\omega)$. Ett exempel på en sådan situation får vi med till exempel integralen

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{1}{t-z} dt = \begin{cases} 1 & , \quad |z| < 1 \\ 0 & , \quad |z| > 1 \end{cases}$$

över enhetscirkeln, $|t| = 1$. Om z är en punkt på enhetscirkeln så är $F(z)$ inte definierad. Men om z är en punkt inuti enhetscirkeln så har $F(z)$ värdet 1 och om z är en punkt utanför så har $F(z)$ värdet 0.

3.2 Hölderkontinuitet

En funktion f (som antingen är reell eller komplex) är Hölderkontinuerlig i punkten x_0 om det finns två positiva konstanter H och m sådana att

$$|f(x) - f(x_0)| \leq H|x - x_0|^m.$$

Konstanten H kallas för Hölderkonstanten i olikheten och m är Hölderolikhetens ordning. Om vi har $m = 1$ säger vi att funktionen är Lipschitzkontinuerlig. (King 2009, s. 12-13)

På motsvarande sätt är funktionen f Hölderkontinuerlig på en öppen eller sluten glatt kurva C för alla godtyckliga punkter x och y på C om

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^m.$$

H och m , $0 < m \leq 1$, är två positiva konstanter och $|x - y|$ är kortaste avståndet mellan x och y . (King 2009, s. 12-13, Lu 1993, s. 15)

Exempel 3.2.1

Ett exempel på en Hölderkontinuerlig funktion är funktionen $f(x) = (x + 1)^2$ definierad på intervallet $[0, 1]$. Vi antar att x och y är två punkter i intervallet, då får vi att

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(x + 1)^2 - (y + 1)^2| \\ &= |x^2 + 2x + 1 - y^2 - 2y - 1| \\ &= |x^2 - y^2 + 2x - 2y| \\ &= |(x - y)(x + y) + 2(x - y)| \\ &= |(x - y)(x + y + 2)| \\ &= |(x - y)||x + y + 2|. \end{aligned}$$

I och med att funktionen är definierad på intervallet $[0, 1]$ får vi att

$$|(x - y)(x + y + 2)| \leq 4|x - y|.$$

Funktionen är alltså begränsad med konstanten $H = 4$ och ordningen $\alpha = 1$. Eftersom vi har $\alpha = 1$ uppfyller funktionen också villkoren för att vara Lipschitzkontinuerlig.

Exempel 3.2.2

Ett exempel på en funktion som däremot inte är Hölderkontinuerlig kan vi hitta i Fiorenza (2016, s. 5), nämligen funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\log(x)}, & x \in]0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

i intervallet $[0, \frac{1}{2}]$.

3.3 Plemelj-formlerna

Sokhotski-Plemelj formlerna hjälper oss att hitta gränsvärdena $F^+(\omega)$ och $F^-(\omega)$ för en Cauchy integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (1)$$

när z närmar sig ω från positiva sidan (insidan) respektive negativa sidan (utsidan) om en kurva C . Punkten z är en godtycklig punkt i planet som inte ligger på C , medan ω är en punkt som ligger på kurvan C .

Teorem 4. (Plemelj-formlerna)

Antag att kurvan C är en enkel glatt kurva i ett enkelt sammanhängande område D och att funktionen $f(t)$ är Hölderkontinuerlig på kurvan. För varje punkt ω på kurvan, som inte är en ändpunkt, kommer integralen $F(z)$ att ha gränsvärdena

$$F^+(\omega) = \frac{1}{2}f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt \quad (2)$$

och

$$F^-(\omega) = -\frac{1}{2}f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt, \quad (3)$$

när z närmar sig punkten ω på kurvan från kurvans positiva respektive negativa sida. Funktionerna 2 och 3 ovan brukar kallas Plemelj-formlerna.

Kommentar

Funktionerna 2 och 3 är förenklade versioner där man antar att C är en glatt kurva, men det finns även versioner av ekvationerna för situationer där vi integrerar över en kurva som inte är glatt. Då ser ekvationerna i stället ut på följande sätt

$$F^+(\omega) = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt$$

och

$$F^-(\omega) = -\frac{\theta}{2\pi}f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt.$$

Här är punkten ω en spets och θ är vinkeln mellan de två tangenter till kurvan C som går igenom ω .

Plemelj-formlerna i Teorem 4 ger också att

$$F^+(\omega) - F^-(\omega) = f(\omega) \quad (4)$$

och

$$F^+(\omega) + F^-(\omega) = \frac{1}{\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t - \omega} dt. \quad (5)$$

Vi ska nu bevisa Teorem 4, när Plemelj-formlerna är ekvationerna 2 och 3. Beviset är det som används i Lu (1993, s. 24-27) och ursprungligen gjordes av J. Du. Det klassiska beviset av Plemelj-formlerna är mer komplicerat än det här beviset. För att kunna bevisa Plemelj-formlerna behöver vi följande lemma. Beviset av Lemma 3 hittas i Lu (1993, s. 24-25).

Lemma 3

Vi antar att $f(t)$ är Hölderkontinuerlig med ordning α , $0 < \alpha \leq 1$, på en enkel glatt kurva C . Vi antar att l är en del av kurvan C , med längd l . Då finns en konstant M som är oberoende av l och z . Då är

$$\left| \int_l \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt \right| \leq Ml^\alpha.$$

Punkten z_C är den punkt på kurvan C som ligger närmast punkten z .

Bevis av Teorem 4

Vi antar att C är en positivt orienterad enkel glatt kurva som är sluten och att $f(t)$ är Hölderkontinuerlig. Vi antar att z är en godtycklig punkt i det komplexa planet, men som inte ligger på kurvan C . Vi antar att punkten z_C är den punkt på C som ligger närmast z . Vi kan skriva om integralen

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z} dt$$

som

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z_C)}{t - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt + \frac{f(z_C)}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t - z} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Vi ska nu undersöka värdet av integralen $F(z)$ när punkten z närmar sig punkten ω som ligger på kurvan C . Eftersom beviset är rätt långt delar vi in det i tre delar för att underlätta läsningen. I del 1 evaluerar vi högra integralen i ekvation 6 ovan, i del 2 evaluerar vi vänstra integralen. I del 3 skriver vi om och evaluerar de uttryck vi fått i del 2 så att de slutligen får den form vi vill ha.

Del 1

Vi börjar alltså med att evaluera

$$\frac{f(z_C)}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-z} dt$$

i ekvation 4 när z närmar sig C . Det vill säga, vi beräknar

$$\lim_{z \rightarrow \omega} \frac{f(z_C)}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-z} dt.$$

Eftersom z_C är den punkt på kurvan som ligger närmast z så kommer denna punkt också att komma allt närmare ω när z närmar sig ω . Eftersom $f(t)$ är Hölderkontinuerlig, så kommer

$$\lim_{z \rightarrow \omega} f(z_C) = f(\omega),$$

när $z_C \rightarrow \omega$.

Beroende på om z går mot ω från insidan eller utsidan av kurvan C så kommer gränsvärdet

$$\lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-z} dt$$

att ha två olika värden. Om z befinner sig på insidan av C får vi

$$\lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-z} dt = f(\omega),$$

och om z befinner sig på kurvans utsida får vi

$$\lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-z} dt = 0,$$

enligt Cauchys integralsats och integralformel. Alltså är nu värdet för F när $z \rightarrow \omega$ från insidan

$$F^+(\omega) = \lim_{z \rightarrow \omega^+} F(z) = f(\omega) + \lim_{z \rightarrow \omega^+} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t-z} dt$$

och från utsidan

$$F^-(\omega) = \lim_{z \rightarrow \omega^-} F(z) = \lim_{z \rightarrow \omega^-} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t-z} dt.$$

Del 2

Vi vill nu visa att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt \quad (7)$$

konvergerar mot

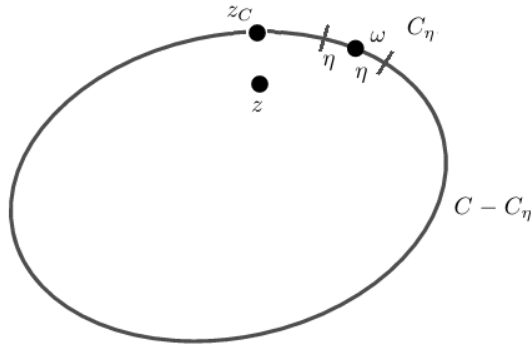
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \quad (8)$$

när z går mot ω . I uttryck 8 har vi en singularitet i nämnaren, men eftersom f är Hölderkontinuerlig så är integranden ändå integrerbar.

Vi vill visa att för varje litet tal ϵ så existerar ett litet tal η sådant att om $|z - \omega| < \eta$ så är också

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| < \epsilon.$$

För att utföra beviset delar vi upp kurvan C . Vi gör det med hjälp av en liten cirkel med mittpunkten ω och radien η . Vad som återstår av kurvan utanför cirkeln är $C - C_\eta$ och kurvbiten som finns inuti cirkeln är C_η . Se Figur 6.



Figur 6: Kurvstyckena C_η och $C - C_\eta$.

Vi delar nu upp integralen och integrerar över $C - C_\eta$ och C_η . Vi får alltså att

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right) \right|.$$

Med hjälp av triangelolikheten får vi nu att

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right) \right| \\ = \frac{1}{2\pi} \left| \left(\int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right) \right. \\ \left. + \left(\int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right) \right| \\ \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| \\ + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| \\ \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| \\ + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right|.$$

Lu (1993, s. 26) skriver nu om

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| \\ + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right|$$

som

$$\frac{1}{2\pi}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3).$$

Eftersom $f(t)$ är Hölderkontinuerlig med ordning α så finns det enligt Lemma 3 en konstant M sådan att

$$\Delta_2 \leq M\eta^\alpha$$

och

$$\Delta_3 \leq M\eta^\alpha.$$

Som η väljer vi nu ut ett tal som är så litet att både Δ_2 och Δ_3 är mindre än $\epsilon/3$. Vad som återstår är att beräkna Δ_1 , det vill säga integralen över kurvan $C - C_\eta$. Vad vi vill visa är ju att integralen konvergerar när $z \rightarrow \omega$. Vi begränsar nu därför avståndet mellan punkten z i planet och punkten ω så att det är mindre än $\eta/2$, det vill säga $|z - \omega| < \eta/2$. Eftersom t är en punkt på kurvan $C - C_\eta$ och avståndet från ω till kurvan $C - C_\eta$ är η , så följer att $|t - \omega| > \eta$. Då får vi också att $|t - z| > \eta/2$.

Vi skriver om uttrycket för Δ_1 och får

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| \\ &= \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega) + f(\omega) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| \\ &= \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - z} dt + \int_{C-C_\eta} \frac{f(\omega) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| \\ &= \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - z} - \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt + \int_{C-C_\eta} \frac{f(\omega) - f(z_C)}{t - z} dt \right| \\ &= \left| \int_{C-C_\eta} \frac{(f(t) - f(\omega))(z - \omega)}{(t - z)(t - \omega)} dt + \int_{C-C_\eta} \frac{f(\omega) - f(z_C)}{t - z} dt \right| \\ &\leq \int_{C-C_\eta} \frac{|f(t) - f(\omega)||z - \omega|}{|t - z||t - \omega|} |dt| + \int_{C-C_\eta} \frac{|f(\omega) - f(z_C)|}{|t - z|} |dt|. \end{aligned}$$

Vi har antagit att $|z - \omega| < \eta/2$ och konstaterat att $|t - z| > \eta/2$ och $|t - \omega| > \eta$. Vi får också att

$$|f(t) - f(\omega)| < |f(t)| + |f(\omega)| < 2 \max |f(t)|.$$

Integralen över kurvbågen $C - C_\eta$ betecknar vi med L . Då får vi att

$$\begin{aligned} & \int_{C-C_\eta} \frac{|f(t) - f(\omega)||z - \omega|}{|t - z||t - \omega|} |dt| + \int_{C-C_\eta} \frac{|f(\omega) - f(z_C)|}{|t - z|} |dt| \\ & \leq \frac{4 \max |f(t)| L}{\eta^2} |z - \omega| + \frac{2L}{\eta} |f(\omega) - f(z_C)|. \end{aligned}$$

När $z \rightarrow \omega$ så gäller också att $z_C \rightarrow \omega$ och därmed att $f(z_C) \rightarrow f(\omega)$. Alltså kan η väljas så litet att

$$\Delta_1 = \left| \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \int_{C-C_\eta} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

när z närmar sig ω .

Vi har alltså visat att det finns ett η sådant att

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(z_C)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \right| < \epsilon,$$

när $|z - \omega| < \eta$.

Då får vi uttrycken

$$F^+(\omega) = f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt$$

och

$$F^-(\omega) = \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt.$$

Del 3

Nu återstår bara att skriva om integralen

$$\frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt. \quad (9)$$

Vi får att

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega} dt \\ & = \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t - \omega} - \frac{f(\omega)}{t - \omega} dt \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt - \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(\omega)}{t-\omega} dt. \quad (11)$$

I Del 2 konstaterade vi att integralen i uttryck 9 existerar. Det gör även vänster del av uttryck 11 med hjälp av principalvärdet, och därmed också höger del och vi kan göra omskrivningen från uttryck 10 till uttryck 11. I och med att $f(\omega)$ är konstant och oberoende av t får vi integralen

$$\frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt - \frac{f(\omega)}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{1}{t-\omega} dt.$$

Integralen

$$p.v. \int_C \frac{1}{t-\omega} dt$$

kan vi beräkna på samma sätt som vi beräknade integralen i kapitel 2.4. Genom att göra om kurvan C med hjälp av kurvbågen C_ϵ får vi att

$$\int_{C+C_\epsilon} \frac{1}{t-\omega} dz = p.v. \int_C \frac{1}{t-\omega} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{1}{t-\omega} dz$$

och

$$p.v. \int_C \frac{1}{t-\omega} dz = \int_{C+C_\epsilon} \frac{1}{t-\omega} dz - \int_{C_\epsilon} \frac{1}{t-\omega} dz$$

$$= 2\pi i - i(\pi - 0) \text{Res}(\omega)$$

$$= 2\pi i - i\pi \cdot \lim_{z \rightarrow \omega} (z - \omega) \frac{1}{z - \omega} = \pi i.$$

Vi får att

$$\frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{1}{t-\omega} dt = \frac{1}{2\pi i} \pi i = \frac{1}{2}.$$

Alltså har vi nu kommit fram till att

$$\frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t) - f(\omega)}{t-\omega} dt = \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt - \frac{f(\omega)}{2}.$$

Slutligen kommer vi fram till att $F(z)$, när $z_0 \rightarrow \omega$ från insidan, har värdet

$$F^+(\omega) = \lim_{z \rightarrow \omega^+} F(z) = f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t-\omega} dt - \frac{f(\omega)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t - \omega} dt$$

och när $z_0 \rightarrow \omega$ från utsidan

$$F^-(\omega) = \lim_{z \rightarrow \omega^-} F(z) = -\frac{1}{2}f(\omega) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_C \frac{f(t)}{t - \omega} dt.$$

□

4 Hilbert-transformen

I det här kapitlet ska vi introducera Hilbert-transformen och se på några exempel där vi använder teorin i kapitel 2 och 3. Hilbert-transformen definieras på följande sätt (Saff och Snider 2014, s. 499-500).

Definition 4.1.

Hilbert-transformen $h(x)$ av den reella funktionen $g(x)$ definieras som

$$H(g(x)) = h(x) := -\frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt. \quad (12)$$

Hilbert-transformens invers ges av funktionen

$$g(x) := \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{t-x} dt. \quad (13)$$

För att transformen och dess invers ska existera måste funktionerna g och h vara tillräckligt snälla, till exempel Hölderkontinuerliga, och deras integraler sådana att de inte leder till problem i $(-\infty, \infty)$. Vi går inte närmare in på vad som menas med snälla funktioner här. Integranderna i formel 12 och 13 är däremot inte integrerbara direkt eftersom de har en singularitet i nämnaren, därför använder man Cauchys principalvärde för att beräkna transformen. Det här förutsätter att principalvärdet för integralen faktiskt existerar. Som vi kommer att se i exempel 4.2.1 i kapitel 4.2 så har dock inte alla Hilbert-transformer en invers.

Transformen har fått sitt namn efter David Hilbert, men det var egentligen inte Hilbert som presenterade formeln som den ser ut ovan i Definition 4.1. Hilberts bidrag ledde till definitionen av Hilbert-transformen på en cirkel. Definitionen av transformen som den ser ut i Definition 4.1 diskuterades djupare för första gången av G. H. Hardy och det var också han som år 1924 gav den namnet Hilbert-transformen. (King 2009, s. 3)

Hilbert-transformen har många användningsområden, inom allt från elektroteknik och radiokommunikation till analys av aktiepriser. Men ett av transformens viktigaste användningsområden är radiokommunikation och signalbehandling. Funktionerna $h(t)$ och $g(t)$ är reella och inom signalbehandling kallas signaler som uppfyller sambandet

$$f(t) = g(t) + ih(t),$$

för analytiska signaler, där $f(z)$ är en analytisk funktion i den övre halvan av det komplexa talplanet. $g(t)$ är den ursprungliga signalen och $h(t)$ är Hilbert-transformen av $g(t)$. En anledning till att Hilbert-transformen är så användbar inom signalbehandling och inom många andra områden är att den åstadkommer en färförskjutning på 90 grader. Positiva frekvenser ökas med 90 grader och negativa frekvenser reduceras med 90 grader. (King 2009, s. 181; Saff och Snider 2014, s. 499-504)

4.1 Några egenskaper hos Hilbert-transformen

Vi ska nu se på några fler av egenskaperna hos Hilbert-transformen. Dessa egenskaper, och många fler, går att hitta i kapitel 4 och 11 i King (2009). För att egenskaperna ska gälla och vara meningsfulla behöver vi anta att $f(x)$ och $g(x)$ existerar och är snälla funktioner.

1. **Linearitet.** Hilbert-transformen är en linjär operator. Det vill säga om α och β är konstanter får vi att

$$H(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha H(f(x)) + \beta H(g(x)).$$

2. **Deriverbarhet.** Om $H(f(x)) = g(x)$, så är

$$H(f'(x)) = g'(x).$$

3. **Inversa transformen.** Om $H(f(x)) = g(x)$ så kommer dess invers att vara

$$H(H(f(x))) = -f(x).$$

4. **Ortogonalitet.** Om $H(f(x)) = g(x)$ så är $f(x)$ och $g(x)$ ortogonala. Det vill säga

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(f(x)) = 0.$$

5. **Linjära skalförändringar.** Om $H(f(x)) = g(x)$, så är

$$H(f(ax)) = g(ax), \quad a > 0,$$

$$H(f(-ax)) = -g(-ax), \quad a > 0,$$

och

$$H(f(x+a)) = g(x+a), \quad a > 0.$$

6. **Udda och jämna funktioners transformer.** Om funktionen $f(x)$ är jämn är dess Hilbert-transform $Hf(x)$ udda. Om funktionen $f(x)$ är udda är dess Hilbert-transform $Hf(x)$ jämn.

4.2 Några exempel på Hilbert-transformer

Vi ska nu se på några exempel på Hilbert-transformer. I Tabell 1 kan vi se några vanliga exempel på funktioner och deras Hilbert transformer. I Tabell 1 ser vi bland annat att jämna trigonometriska funktioner ger udda transformer och udda funktioner ger jämna transformer, precis som vi såg i kapitel 4.1. Källor är Layer och Tomczyk (2015, s. 111) och Saff och Snider (2014, s. 500).

Tabell 1: Exempel på Hilbert-transformer

Funktionen $f(x)$	Hilbert transformen $H(f(x))$
$\cos(\omega x), \quad \omega > 0$	$\sin(\omega x)$
$\sin(\omega x), \quad \omega > 0$	$-\cos(\omega x)$
$\cos(\omega x), \quad \omega < 0$	$-\sin(\omega x)$
$\sin(\omega x), \quad \omega < 0$	$\cos(\omega x)$
$\frac{\sin(ax)}{x}, \quad a > 0$	$\frac{1-\cos(ax)}{x}$
$e^{ax}, \quad a > 0$	$-ae^{ax}$
$e^{-ax}, \quad a > 0$	ae^{-ax}
c	0

Exempel 4.1.

Att Hilbert-transformen av en konstant c alltid är 0 kan vi se med hjälp av Definition 4.1. I det här fallet har vi både en singularitet i en punkt och ett obegränsat integrationsintervall. Med hjälp av Cauchys principalvärde får vi att

$$\begin{aligned}
H(c) &= -\frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{t-x} dt \\
&= -\frac{c}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-x} dt \\
&= -\frac{c}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{x-\epsilon} \frac{1}{t-x} dt + \int_{x+\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{1}{t-x} dt \right] \\
&= -\frac{c}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln |t-x| \Big|_{-\frac{1}{\epsilon}}^{x-\epsilon} + \ln |t-x| \Big|_{x+\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \right] \\
&= -\frac{c}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln |x-\epsilon-x| - \ln \left| -\frac{1}{\epsilon} - x \right| + \left[\ln \left| \frac{1}{\epsilon} - x \right| - \ln |x+\epsilon-x| \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln |-\epsilon| - \ln \left| -\frac{1}{\epsilon} - x \right| + \ln \left| \frac{1}{\epsilon} - x \right| - \ln |\epsilon| \right] \\
&= -\frac{c}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln |-\epsilon| - \ln \left| \frac{-1 - \epsilon x}{\epsilon} \right| + \ln \left| \frac{1 - \epsilon x}{\epsilon} \right| - \ln |\epsilon| \right] \\
&= -\frac{c}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln |-\epsilon| - (\ln |-1 - \epsilon x| - \ln |\epsilon|) + \ln |1 - \epsilon x| - \ln |\epsilon| - \ln |\epsilon| \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Integralen har värdet 0. Det här är ett exempel på en Hilbert-transform där transformens invers inte ger den ursprungliga funktionen. Inversen av 0 kommer att vara 0 och inte konstanten c .

Exempel 4.2.

Exempel som man ofta stöter på i litteratur som behandlar Hilbert-transformen är transformen av trigonometriska funktioner. Bland annat illustrerar de här exemplen fasförskjutningen $\pi/2$. Vi ska nu beräkna Hilbert-transformen av $\sin(t)$, $t > 0$ med hjälp av formeln i Definition 4.1. Vi får

$$\begin{aligned}
H(\sin(t)) &= -\frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t-x} dt = -\frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}}{t-x} dt \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \left[p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t-x} dt - p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it}}{t-x} dt \right].
\end{aligned}$$

Integranderna är kontinuerliga utom i punkten $t = x$. Vi formar en sluten kurva C i övre halvan av komplexa talplanet med hjälp av linjestyckena $[-\rho, x - \epsilon]$ och $[x + \epsilon, \rho]$ på x -axeln, kurvan S_{ϵ}^{+} från $x - \epsilon$ till $x + \epsilon$ över punkten x och kurvbågen C_{ρ}^{+} från $-\rho$ till ρ . Vi får den komplexa integralen

$$\int_{-\rho}^{x-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z-x} dz + \int_{S_{\epsilon}^{+}} \frac{e^{iz}}{z-x} dz + \int_{x+\epsilon}^{\rho} \frac{e^{iz}}{z-x} dz + \int_{C_{\rho}^{+}} \frac{e^{iz}}{z-x} dz = \int_C \frac{e^{iz}}{z-x} dz$$

Med hjälp av Cauchys integralsats och Jordans lemma får vi

$$\int_{-\rho}^{x-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z-x} dz + \int_{S_{\epsilon}^{+}} \frac{e^{iz}}{z-x} dz + \int_{x+\epsilon}^{\rho} \frac{e^{iz}}{z-x} dz + 0 = 0$$

$\implies$

$$\begin{aligned}
p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t-x} dt &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{x-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z-x} dz + \int_{x+\epsilon}^{\rho} \frac{e^{iz}}{z-x} dz = \int_{S_{\epsilon}^{+}} \frac{e^{iz}}{z-x} dz \\
&= i(\pi - 0) \operatorname{Res}(x) = \pi i e^{it}.
\end{aligned}$$

På motsvarande sätt kan vi beräkna integralen

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it}}{t-x} dt,$$

men med en sluten kurva i nedre halvan av komplexa talplanet. Vi använder linjestyckena $[-\rho, x-\epsilon]$ och $[x+\epsilon, \rho]$ på x -axeln, kurvan S_{ϵ}^{-} från $x+\epsilon$ till $x-\epsilon$ under punkten x och kurvbågen C_{ρ}^{-} från $-\rho$ till ρ . Vi får att

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it}}{t-x} dt = \int_{S_{\epsilon}^{-}} \frac{e^{-iz}}{z-x} dz = i(0-\pi) \operatorname{Res}(x) = -\pi i e^{-it}.$$

Slutligen får vi alltså att

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \left[p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t-x} dt - p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it}}{t-x} dt \right] = \\ & -\frac{1}{2\pi i} \left[i\pi e^{it} - (-i\pi e^{-it}) \right] = -\left[\frac{i\pi e^{it} + i\pi e^{-it}}{2} \right] = -\cos(t). \end{aligned}$$

Vi kan också se att vi får fasförskjutningen $-\frac{\pi}{2}$ i exemplet. $\sin(t)$ kan skrivas om med trigonometriska identiteter och vi får

$$H(\sin(t)) = H(-\cos(t + \frac{\pi}{2})) = -\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(t).$$

Hilbert-transformen ger en förskjutning av $\sin(t)$ med $\frac{\pi}{2}$ till $\sin(t - \frac{\pi}{2})$.

4.3 Riemann-Hilbert problemet

Avslutningsvis ska ta en titt på sambandet mellan Hilbert-transformen och Plemelj-formlerna. Sambandet kan man finna i en grupp av problem som kallas Riemann-Hilbert problemen. Det finns några olika varianter av problemen (Riemann problemet, Hilbert problemet och Riemann-Hilbert problemet), men det problem vi tar upp här är Riemann-Hilbert problemet. Teorin är hämtad från King (2009, kapitel 11) och Lu (1993, kapitel 2). Vi börjar med att definiera Riemann-Hilbert problemet.

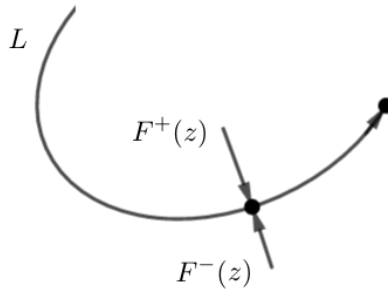
Definition 4.3.1. Riemann-Hilbert problemet

Riemann-Hilbert problemet går ut på att man vill hitta en funktion $F(z)$ i det komplexa planet som är analytisk i alla punkter z som inte ligger på en kontur L och som uppfyller gränsvärdesekvationen

$$F^{+}(t) = g(t)F^{-}(t) + f(t), \quad t \in L, \quad (14)$$

för givna Hölderkontinuerliga funktioner $g(t)$ och $f(t)$. L är en glatt kontur som tillåts vara en sluten kurva eller en kurvbåge.

$F^+(t)$ och $F^-(t)$ är de gränsvärden vi får när z närmar sig kurvan L från positiva respektive negativa sidan om kurvan, på samma sätt som i definitionerna i kapitel 3.1. Om L är en kurvbåge definieras positiva och negativa sidan som i Figur 7 nedan, enligt King (2009, s. 545).



Figur 7: Positiva och negativa sidorna av en kurvbåge L .

Den enklaste versionen av ekvation 14 i definitionen ovan får vi när $g(t) = 1$. Då får vi ekvationen

$$F^+(t) = F^-(t) + f(t), \quad t \in L. \quad (15)$$

Funktionen $F^+(t)$ är analytisk i området på positiva sidan om L och $F^-(t)$ är analytisk på negativa sidan. Ekvation 15 kan vi känna igen som ekvation 4 bland Plemelj-formlerna i kapitel 4.3. Vi kan använda oss av integralen

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt, \quad z \notin L.$$

När z är en punkt på kurvan L så kommer $F(z)$ ha värdet

$$F^+(z) = \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt$$

på kurvans positiva sida och värdet

$$F^-(z) = -\frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2\pi i} p.v. \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt$$

på kurvans negativa sida. Med hjälp av definitionen för Hilbert-transformen så kan vi ytterligare skriva om dessa ekvationer. Vi får då att

$$F^+(z) = \frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2i}H(f(z)) \quad (16)$$

och

$$F^-(z) = -\frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2i}H(f(z)) \quad (17)$$

Slutligen så kan vi konstatera att ekvationerna 16 och 17 ovan uppfyller ekvation 15. Vi får att $F^+(z) - F^-(z) = f(z)$. Tidigare i kapitel 4 konstaterade vi att Cauchys principalvärde behövs för att beräkna Hilbert-transformen, och vi ser alltså nu också att det finns ett samband mellan Plemelj-formlerna och Hilbert-transformen.

5 Litteratur

Fiorenza, Renato. (2016). *Hölder and locally Hölder Continuous Functions, and Open Sets of Class C^k , $C^{k,\lambda}$* . Cham: Springer International Publishing

King, Frederick W. (2009). *Hilbert transforms. Vol. 1*. Cambridge: Cambridge University Press

Layer, Edward. och Tomczyk, Krzysztof. (2015). *Signal Transforms in Dynamic Measurements. [Elektronisk resurs]*. Cham: Springer International Publishing

Lu, Jian-Ke (1993). *Boundary value problems for analytic functions*. Singapore: World Scientific

Saff, Edward B. och Snider, Arthur David. (2014). *Fundamentals of complex analysis: engineering, science, and mathematics*. 3. ed. Harlow [England]: Pearson